교사용 지도서

고|등|학|교

기하와 벡터

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

고 등 학 교

기하와 벡터

교사용 지도서

(주)지학사

머리말



현대 과학 문명은 미처 예상하지 못한 분야까지 급속도로 발전하고 있으며, 그 발전의 중심에는 언제나 수학이 자리해 왔습니다. 이러한 상황 가운데 수학 교육의 중요성은 더욱 부각되고 있습니다. 하지만 수학은 일반적으로 어려운 교과로 인식되기 때문에 하고자 하는 의욕이 있음에도 효율적인 학습이 이루어지지 않는 경향이 많습니다. 그 이유는 여러 가지가 있지만 다음과 같이 두 가지로 요약할 수 있습니다.

첫째, 방법론의 문제입니다. 수학은 어느 교과보다도 체계적이고 논리적이기 때문에 단계적인 학습을 통하여 단원 상호 간의 연계적 이해가 이루어져야 합니다. 또한 수학은 누적적인 학문입니다. 오늘날의 수학은 오래전부터 발견되고 발전해 온 수학을 기초로 이루어져 있으므로 이를 무시하면 수학 학습은 마치 사상누각이 되는 것입니다. 따라서 수학은 반드시 기초부터 시작해야 하고, 이를 바탕으로 체계적이고 논리적으로 확장해 나가야 합니다. 그러나 수학을 학습하는 데 이와 같은 수학의 특징을 중요하지 않게 여기는 경향이 있습니다.

둘째, 응용력의 문제입니다. 이미 언급했듯이 수학은 논리적인 전개를 바탕으로 합니다. 그러므로 체계적인 이해를 전제로 하지 않은 단순한 암기와 기계적인 응용은 심도 있는 수학 학습에 한계를 불러옵니다. 즉, 어떠한 문제가 주어졌을 때, 문제의 성격과 해결 과정에 대한 철저한 사고 없이 문제 유형과 공식을 대응하여 해결하려는 식의 요령은 오히려 다양한 문제에 적용하는 데 한계를 가져오고 수학 학습을 보다 어렵게 느끼게 합니다.

본 교사용 지도서는 위와 같은 점들을 고려하여 단원 간의 연계와 원리의 이해 및 적용에 중점을 두고 편찬하였습니다. 그리고 선생님께서 학생들에게 수학을 지도할 때, 학생들이 보다 흥미와 관심을 가지고 쉽게 이해할 수 있도록 교과서 체계에 맞추어 구성하였습니다. 아울러 교과서의 활용에 도움이 되는 사항들을 함께 수록하였으며, 구체적인 활용 방법은 따로 설명하였습니다.

교육 현장에 계신 선생님께서 본 교사용 지도서를 효율적으로 사용하여 보다 알찬 수학 교육의 결실을 거두기 바랍니다.

지은이 씀

구성과 특징

교사용 지도서는 크게 총론과 각론으로 나누어, 교사들의 전문성 신장에 도움을 줄 수 있는 내용과 교과서의 각 단원 지도에 유용한 자료들을 제공하였습니다.

총론

수학 교육의 필요성 및 목적, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해, 수학 교과서의 개발 동향, 수학적 문제 해결, 수학과 평가의 특징 및 방법, 좋은 수업의 의미, 수학과 수업 평가 등을 설명하였고, 교과서의 구성과 연간 지도 계획안을 제시하였습니다.

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초·중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

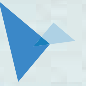
02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움



각론

단원별 지도에 참고할 수 있는 지도 목표, 교수 · 학습상의 유의점, 지도 계획, 이론적 배경, 차시별 교수 · 학습 과정안(예시), 교과서 내용의 해설과 문제 풀이 및 교과서 내용 지도 시 유용한 자료들을 제시하였습니다.

단원의 지도 목표

1. 이차곡선
① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

2. 평면 곡선의 접선
① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 이심률을 이용한 정의는 다루지 않는다.
② 이차곡선은 축이 x축, y축에 평행한 것만 다룬다.
③ 간단한 곡선을 음함수나 매개변수를 이용하여 나타내 봄으로써 음함수와 매개변수로 나타낸 함수는 곡선을 표현하는 방법 중 하나임을 이해하게 한다.
④ 음함수와 매개변수로 나타낸 함수는 간단한 것만 다룬다.

교수 · 학습의 계열

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~4	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 이차곡선	중단원 도입		12	• 이차곡선	
	01 포물선		13~18	• 포물선의 방정식	포물선(축, 꼭짓점, 초점, 준선)
	02 타원	5~7	19~24	• 타원의 방정식	타원(초점, 꼭짓점, 중심, 장축, 단축)
	03 쌍곡선	8~10	25~32	• 쌍곡선의 방정식 • 이차곡선	쌍곡선(초점, 꼭짓점, 중심, 주축, 점근선) 이차곡선
	수준별 학습	11	33~35	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 평면 곡선의 접선	중단원 도입	12~16	36	• 사이클로이드(cycloid)	
	01 음함수의 미분		37~44	• 음함수의 미분법 • 이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식	음함수
	02 매개변수로 나타낸 함수의 미분	17~19	45~48	• 매개변수로 나타낸 함수의 도함수	매개변수
	수준별 학습	20	49~51	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		21~22	52~59	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 지도 목표

교육과정에 명시된 대단원의 지도 목표를 중단원별로 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

대단원의 지도에 있어서 유의해야 할 사항 중 교육과정에 명시된 내용을 설명하였습니다.

교수 · 학습의 계열

단원과 관련하여 선수 학습과 후속 학습의 연계성을 제시하였습니다.

단원의 차시별 지도 계획

중단원과 소단원별 교과서 쪽수, 지도 내용, 교육과정에 명시된 용어와 기호 등을 쉽게 알아볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.

단원의 이론적 배경

단원의 이론적 배경과 이론이 발전되어 온 수학사적 배경을 설명하였습니다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

두 개의 차시에 해당하는 교수 · 학습 과정안을 예로 제시하였습니다.

구성과 특징

1 이차곡선

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

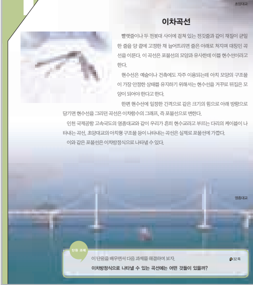
소단원명	지도 내용
01 포물선	포물선의 방정식
02 타원	타원의 방정식
03 쌍곡선	쌍곡선의 방정식
	이차곡선
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 이차곡선은 태양계의 행성이나 혜성의 궤도를 밝히는 데 중요한 역할을 하며, 천체를 관측하는 망원경을 제작할 때에도 그 성질이 활용된다.
또 이차곡선은 운동 물체의 궤도를 연구하는 운동 역학 분야, 다리나 터널을 설계하는 토목 공학 분야, 소리의 효과를 연구하는 음향학 분야 등에도 많이 활용된다.
이 단원에서는 이차곡선인 포물선, 타원, 쌍곡선의 뜻을 알고 이를 바탕으로 각각의 방정식을 구하여 이차곡선을 자유롭게 사용하고 활용할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

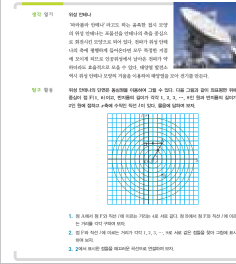
성취 기준		성취 수준
1. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	상	포물선의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표축 위에 초점이 있고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식, 초점과 꼭짓점의 좌표, 준선과 축의 방정식을 구할 수 있다.
	하	포물선의 뜻과 초점, 꼭짓점, 준선, 축의 뜻을 말할 수 있다.
2. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.	상	타원의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표축 위에 초점이 있고 중심이 원점인 타원의 방정식, 초점과 꼭짓점의 좌표, 장축과 단축의 길이를 구할 수 있다.
	하	타원의 뜻과 초점, 꼭짓점, 장축, 단축의 뜻을 말할 수 있다.
3. 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.	상	쌍곡선의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표축 위에 초점이 있고 중심이 원점인 쌍곡선의 방정식, 초점의 좌표, 주축의 길이, 점근선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	쌍곡선의 뜻과 초점, 주축, 점근선의 뜻을 말할 수 있다.

교과서 12 쪽



단원 과제
이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 32쪽
이차방정식으로 나타낼 수 있는 곡선에는 어떤 것들이 있을까?

교과서 13 쪽



1. 점 A에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리는 4로 서로 같다. 점 B에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리를 각각 구하여 보자.
2. 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 1, 2, 3, …, 9로 서로 같은 점들을 찾아 그림에 표시하여 보자.
3. 2에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

01 포물선

소단원 지도 목표

① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 포물선의 방정식에서 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.
③ 포물선의 평행이동을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 포물선은 평면도형이므로 포물선 위의 점은 평면 위의 점임을 유의시킨다.
2. 포물선에 관련된 용어를 정의할 때, 구체적인 예를 보이면서 정의한다.
3. 준선이 x축 또는 y축에 평행한 포물선만 다룬다.
4. 그래프는 초점과 준선을 이용하여 그 개형을 그리게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 포물선(抛物線, parabola)
- 포물선의 축(抛物線—軸, axis of parabola)
- 포물선의 꼭짓점(vertex of parabola)
- 포물선의 초점(抛物線—焦點, focal point of parabola)
- 포물선의 준선(抛物線—準線, directrix of parabola)

생각 열기 참/고/자/료

위성 안테나의 면은 포물선을 그 축을 중심으로 회전시켜 만든 모양인 포물면으로 되어 있다. 인공위성에서 발사된 전파는 평행하게 진행하여 위성 안테나에서 반사된 후 초점을 지나게 된다. 따라서 이 초점의 위치에 수신기를 설치하면 미약한 전파도 잘 탐지할 수 있게 된다.
이와 같은 원리는 프랑스의 오델로 태양열 발전소에서 이용되는데 평평한 유리를 경사지게 설치하여 이 반사경에 반사된 태양빛을 초점의 위치에 있는 태양로로 보내어 3000°C가 넘는 열을 발생시킨다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 점 F와 직선 l로부터 같은 거리에 있는 위치를 점으로 나타내 보고, 이 점들을 연결할 때 어떤 모양의 도형을 이루는지 관찰하게 하여 포물선의 뜻과 성질을 이해하게 하려는 것이다.

1. 점 B에서 점 F에 이르는 거리는 4이고, 점 B에서 직선 l에 이르는 거리도 4이다.
2. 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 1, 2, 3, …, 9로 서로 같은 점은 오른쪽 그림의 빨간색 점이다.
3. 오른쪽 그림의 파란색 선과 같다.

중단원을 시작하며
교육과정에 명시된 중단원의 지도 목표를 제시하였습니다.

중단원의 구성
중단원의 소단원명과 각 소단원의 지도 내용을 제시하였습니다.

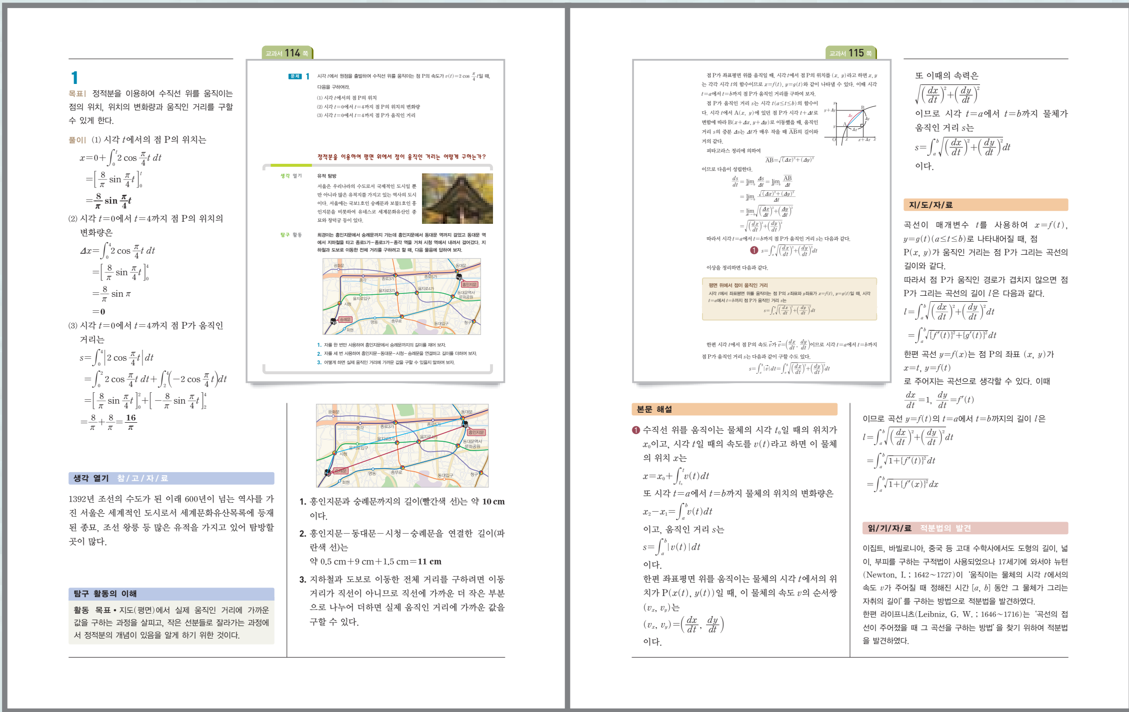
들어가면서
중단원 도입에 소개된 실생활 소재와 단원과의 관련성을 설명하였습니다.

성취 기준과 성취 수준
교육과정에 제시된 단원의 성취 기준 및 상, 중, 하 수준별 성취 수준을 제시하였습니다.

소단원 지도 목표
소단원별로 세부적이고 구체적인 지도 목표를 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점
소단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 정리하였습니다.

새로 나온 용어와 기호
소단원에서 새로 배우게 될 교육과정에 명시된 용어와 기호를 제시하였습니다.



교과서 114 쪽

문제 1 시각 t에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t)=2\cos\frac{\pi}{4}t$일 때, 다음을 구하여라.
(1) 시각 t에서의 점 P의 위치
(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량
(3) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리

정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리는 어떻게 구하는가?

생각 열기 유적 탐방
서울은 우리나라의 수도로서 국제적인 도시일 뿐만 아니라 많은 유적지를 가지고 있는 역사의 도시이다. 서울에는 국보1호인 숭례문과 보물1호인 흥인지문을 비롯하여 유네스코 세계문화유산인 종묘와 창덕궁 등이 있다.

탐구 활동
희경이는 흥인지문에서 숭례문까지 가는데 흥인지문에서 동대문 역까지 걸었고 동대문 역에서 지하철을 타고 종로5가－종로3가－종각 역을 거쳐 시청 역에서 내려서 걸어갔다. 지하철과 도보로 이동한 전체 거리를 구하려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 자를 한 번만 사용하여 흥인지문에서 숭례문까지의 길이를 재어 보자.
2. 자를 세 번 사용하여 흥인지문－동대문－시청－숭례문을 연결하고 길이를 더하여 보자.
3. 어떻게 하면 실제 움직인 거리에 가까운 값을 구할 수 있을지 말하여 보자.

1

목표| 정적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점의 위치, 위치의 변화량과 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 시각 t에서의 점 P의 위치는

$x=0+\int_0^t 2\cos\frac{\pi}{4}t\,dt=\left[\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_0^t=\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\Delta x=\int_0^4 2\cos\frac{\pi}{4}t\,dt=\left[\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_0^4=\frac{8}{\pi}\sin\pi=0$

(3) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$s=\int_0^4\left|2\cos\frac{\pi}{4}t\right|dt=\int_0^2 2\cos\frac{\pi}{4}t\,dt+\int_2^4\left(-2\cos\frac{\pi}{4}t\right)dt=\left[\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_0^2+\left[-\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_2^4=\frac{8}{\pi}+\frac{8}{\pi}=\frac{16}{\pi}$

생각 열기 참/고/자/료

1392년 조선의 수도가 된 이래 600년이 넘는 역사를 가진 서울은 세계적인 도시로서 세계문화유산목록에 등재된 종묘, 조선 왕릉 등 많은 유적을 가지고 있어 탐방할 곳이 많다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지도(평면)에서 실제 움직인 거리에 가까운 값을 구하는 과정을 살피고, 작은 선분들로 잘라가는 과정에서 정적분의 개념이 있음을 알게 하기 위한 것이다.

1. 흥인지문과 숭례문까지의 길이(빨간색 선)는 약 **10 cm**이다.
2. 흥인지문－동대문－시청－숭례문을 연결한 길이(파란색 선)는 약 0.5 cm+9 cm+1.5 cm=**11 cm**
3. 지하철과 도보로 이동한 전체 거리를 구하려면 이동 거리가 직선이 아니므로 직선에 가까운 더 작은 부분으로 나누어 더하면 실제 움직인 거리에 가까운 값을 구할 수 있다.

교과서 115 쪽

점 P가 좌표평면 위를 움직일 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 (x, y)라고 하면 x, y는 각각 시각 t의 함수이므로 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여 보자.
점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t(a\le t\le b)$의 함수이다. 시각 t에서 $A(x, y)$에 있던 점 P가 시각 $t+\Delta t$로 변함에 따라 $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$로 이동했을 때, 움직인 거리 s의 증분 Δs는 Δt가 매우 작을 때 $\overline{AB}$의 길이와 거의 같다.
피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

이므로 다음이 성립한다.

$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같다.

❶ $s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 위에서 점이 움직인 거리
시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는
$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

한편 시각 t에서 점 P의 속도 $\vec{v}$가 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$s=\int_a^b|\vec{v}|dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

본문 해설

❶ 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t_0일 때의 위치가 x_0이고, 시각 t일 때의 속도를 $v(t)$라고 하면 이 물체의 위치 x는
$x=x_0+\int_{t_0}^t v(t)dt$
또 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량은
$x_2-x_1=\int_a^b v(t)dt$
이고, 움직인 거리 s는
$s=\int_a^b|v(t)|dt$
이다.
한편 좌표평면 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 위치가 $P(x(t), y(t))$일 때, 이 물체의 속도 v의 순서쌍 (v_x, v_y)는
$(v_x, v_y)=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$
이다.
또 이때의 속력은
$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$
이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리 s는
$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$
이다.

지/도/자/료

곡선이 매개변수 t를 사용하여 $x=f(t)$, $y=g(t)(a\le t\le b)$로 나타내어질 때, 점 $P(x, y)$가 움직인 거리는 점 P가 그리는 곡선의 길이와 같다.
따라서 점 P가 움직인 경로가 겹치지 않으면 점 P가 그리는 곡선의 길이 l은 다음과 같다.
$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$
한편 곡선 $y=f(x)$는 점 P의 좌표 (x, y)가 $x=t$, $y=f(t)$로 주어지는 곡선으로 생각할 수 있다. 이때 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=f'(t)$
이므로 곡선 $y=f(t)$의 $t=a$에서 $t=b$까지의 길이 l은
$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}dt=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

읽/기/자/료 적분법의 발견

이집트, 바빌로니아, 중국 등 고대 수학사에서도 도형의 길이, 넓이, 부피를 구하는 구적법이 사용되었으나 17세기에 와서야 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)이 '움직이는 물체의 시각 t에서의 속도 v가 주어질 때 정해진 시간 $[a, b]$ 동안 그 물체가 그리는 자취의 길이'를 구하는 방법으로 적분법을 발견하였다.
한편 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)는 '곡선의 접선이 주어졌을 때 그 곡선을 구하는 방법'을 찾기 위하여 적분법을 발견하였다.

생각 열기 참고 자료

생각 열기와 관련된 내용에 대한 충분한 설명을 제시하였습니다.

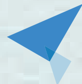
탐구 활동의 이해

탐구 활동의 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

본문 해설

교과서에 제시된 학습 내용을 해설하고, 보다 자세한 설명을 덧붙였습니다.

지도 자료



내용 지도 시 필요한 보충 설명이나 기호에 대한 설명을 제시하였습니다.

읽기 자료

수학사, 생활 속 수학 등 각종 읽기 자료를 제시하였습니다.

문제의 해설

교과서 본문에 있는 모든 문제의 출제 의도 및 지도 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

수행 과제

수행 과제의 출제 의도와 구체적인 예시 답안을 제시하였습니다.

대단원 학습 내용 정리

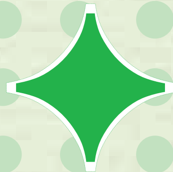
단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하였습니다.

대단원 평가 문제

단원 마무리에 나온 대단원 평가 문제의 지도 목표 및 풀이를 제시하였습니다.

수학 플러스

단원과 관련된 수학, 과학, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 등의 이야기를 소개하였습니다.



그들과 이야기를 나누며

가장 크게 깨달은 것은 자기가 진정으로

하고 싶어하는 것이 무엇인지 깨닫는다면

그 일을 미래의 어느 날로 미루지 말고,

또 그 일을 할 수 없는 이유들을 찾지 말고

'바로 지금' 시작해야 한다는 것이다.

흘러가는 시간은 언젠가 이룰 꿈을 위해

마냥 기다려주지 않으니까.

– 용서해의 《삶의 마지막 축제》 중에서 –

차례

총론

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

이 들어 있으며, 매우 간단한 수학적 원리를 활용하여 흥미진진한 게임을 하는 예에서도 그 심미적 가치를 쉽게 찾을 수 있다. 또한 수학의 아름다움이나 매력은 미적분의 기본 정리에서부터 신라 시대의 술병에 이르기까지 다양한 대상과 수준에서 발견될 수 있다. 이와 같은 풍부한 자료와 유연한 해석을 통하여 문화적 가치, 수학 고유의 심미성을 적절한 수준에서 확인하는 경험은 고등학교를 떠남과 동시에 수학과 멀어지는 대부분의 학생들에게 반드시 필요하다.

수학 교육에서 놓치지 말아야 하는 것은 모든 건전한 시민을 위한 공통적으로 기본적이면서도 필수적인 수학 내용이 무엇인가를 분명히 하는 것이다. 따라서 수학 교육은 모든 학생들에게 꼭 필요한 내용이 무엇인지 명확히 정할 필요가 있으며 그것이 다양한 상황과 측면에 적용되면서 철저히 그리고 깊이 있게 이해되도록 돕는 것이 필요할 것이다. 궁극적으로 교육의 목적은 학생의 잠재력을 계발하고, 건전한 사회인으로서의 역할을 수행하도록 돕는 데 있다. 다른 교과 교육이 그러하듯이 수학도 현대 사회와 미래 사회를 살아갈 건전한 시민으로서 그 사회를 지탱하는 문명적, 문화적 기저 중에서 수학을 기반으로 하는 것에 대하여 수학적으로 이해하는 눈을 기르기 위해 배우는 것이다.

결국 수학을 가르쳐야 하는 이유는 수학의 내용이 인간과 환경에 관한 각종 현상을 보는 안목과 수단을 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제 · 사회 · 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리 · 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적인 방법으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결하게 함으로써 문제 해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고도 할 수 있다. 즉, 조각상의 무게중심, 물건 구매, 유전자의 배열, 황금 비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 일상생활의 다양한 모습들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다(황혜정 외, 2012).

II. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일, 2009 개정 교육과정에 따른 ‘수학과 교육과정’이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되고 있으며, 이에 대한 개정 배경 및 방향, 창의성 강조를 위한 수학적 과정(mathematical process)의 반영, 교육과정 문서의 구성 및 체제, 학교급별 주요 내용 변화에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다.

01 개정의 기본 방향

새로운 수학과 교육과정에서는 우선적으로 2009 개정 교육과정 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는 데 주력하였다. 특히 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육 목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두었으며, 다음의 항목을 구현하고자 하는 것이 새로운 교육과정의 주요 개발 방향이다.

가. 수학 교과 내용의 양 20 % 경감

2009 개정 교육과정 총론의 ‘교육과정 편성 · 운영 지침’의 주요 변화 내용 중 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 대비 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 20 % 경감의 배경이 될 수 있는 근거는 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20 % 범위 내에서 시수를 증감하여 운영할 수 있는 데 있다(교육과학기술부, 2009). 2009 개정 교육과정 총론에서는 각 교과별로 교육과정의 성취 기준을 개발할 경우 학습량이 증가하여 교육 내용의 적정화를 저해할 우려가 있음을 염두에 두고, 교과별 교육과정 개발 시 현행 교육과정 대비 20 %의 내용이 경감되어야 함을 적극 주장하였다(박순경, 2010). 즉, 기준 수업 시수를 감안하되 교과 내용의 양은 현행 교육과정보다 20 % 정도 감축한다고 상정하고 최적한 학습 내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하도록 하였다.

나. 수학적 창의성 강조에 따른 수학적 과정

(1) 수학적 창의성의 의미

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다. 여기서 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

한편 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 본다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장시켜야 할 것이다.

(2) 수학적 과정의 의미 및 반영

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 말하는 '수학적 과정'은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서 '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성 요소로 가지는 개념으로 정의하였다.

여기서 '수학적 문제 해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 이미 알고 있는 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현 수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 구성 체제를 살펴보면, '목표', '내용', '교수 · 학습 방법', '평가' 등의 순으로 구성되어 있다. 학교에서 구체적으로 학습해야 할 수학 성취 기준은 '내용'에서 학년(군)별로 제시되어 있다. 한편 '수학적 과정'의 하위 구성 요소로 설정한 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 사항이다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다.

학교의 수학 교수 · 학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우, 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취 기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 '목표'와 '교수 · 학습 방법'에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점이 있다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 지니고 있다.

따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 보다 구체적인 성취 기준을 가지고 '내용'의 진술에 포함시킴으로써 교과용 도서 및 수업 상황에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명히 다루게 하고 있다. 한마디로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'을 '수학적 과정'으로 간주하고, 이를 학습 내용 성취 기준 및 교수 · 학습상의 유의점, 그리고 교수 · 학습 방법 등에 반영하였다.

수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 특징은 각각 다음과 같다.

〈표 Ⅱ-1〉 수학적 과정의 요소 및 특징

수학적 문제 해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제 해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제 해결 과정이나 완결 후 문제 제기를 통하여 문제 해결을 발전적으로 이끌 수 있다.
라. 문제 해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 이를 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적인 방법으로 검증할 수 있다.
다. 수학적 활동에서 다양하고 독창적인 아이디어가 지니는 가치를 인식할 수 있다.
수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 수학적 활동 중에 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

(3) 학년군제 도입 및 적용

2009 개정 교육과정 총론의 초·중등학교 교육과정 구성의 방침에 의하면 "교육과정 편성·운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성·운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다."라고 규정하고 있다(교육과학기술부, 2009).

현재 2007 개정 교육과정 체제에서는 학년제를 따르고 있다. 즉, 각 학년에서 배워야 할 내용을 학년별로 제시하였다. 반면 학년군제는 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아니라 몇 개 학년을 묶어서 제시한다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 2학년 사이에 학습할 내용을 초등학교 1~2학년군으로 제시하는 것이다.

학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다. 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용을 혹은 더 깊은 내용을 학습할 수 있고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습할 수 있다. 학생들은 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택할 수 있으며, 이는 학생들의 진로 선택과 관련될 수 있다.

또 다른 변화는 학년군제에서는 다양한 교과서가 사용될 수 있다는 것이다. 교육과정에서 엄격한 학년의 구분이 없어지고 내용이 통합적으로 제시되기 때문에 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치할 수 있게 된다. 예를 들어 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 수와 연산 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성할 수 있다. 또는 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다. 즉, 수학 교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하게 된다.

그러나 학년군제에 따르는 단점들도 충분히 예상되기 때문에 학년군제를 실행하기 위해서는 다음과 같은 사항들에 대한 해결 방안이 모색되어야 한다.

첫째, 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다. 학년제 대신에 학년군제를 실시하는 취지 중의 하나는 학생들의 학습 수준 차를 인정하고 학생들의 수준에 맞는 학습을 통해서 사고 발달과 진로 선택에 긍정적인 효과를 주기 위함이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다.

둘째, 수준별 수업이 원활히 시행되기 위해서는 적절한 평가 기준이 마련되어야 한다. 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수하고 이에 대한 타당한 평가가 이루어져야 한다.

셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준이 필요하다.

넷째, 전학생들을 위한 보충 학습 과정 등 교수·학습 방안 및 정책이 마련되어야 한다.

02 수학과 교육과정의 특징

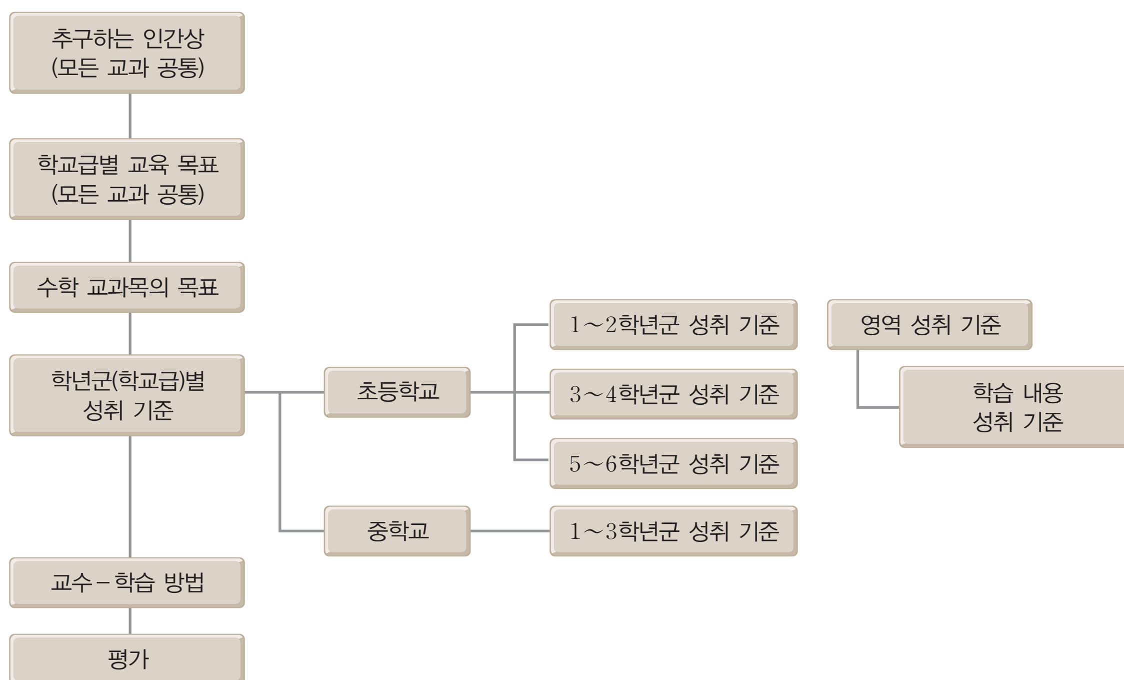
가. 교과목의 구성 및 문서 체제

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교과목은 공통 교육과정과 선택 교육과정으로 구성되어 있으며, 공통 교육과정에는 초등학교 1학년에서부터 중학교 3학년까지 다뤄지는 「수학」 교과목이 해당되며, 선택 교육과정에는 고등학교 1학년에서 3학년까지 다뤄지는 9개 교과목이 포함되어 있다. 선택 교육과정은 '기본 과목', '일반 과목', '심화 과목'으로 구성되어 있으며, 일반 과목은 모두 5단위의 6개 선택 과목으로 「수학 Ⅰ」, 「수학 Ⅱ」, 「확률과 통계」, 「미적분 Ⅰ」, 「미적분 Ⅱ」, 「기하와 벡터」로 구성되어 있다. 그 밖에 기본 과목에는 「기초 수학」, 심화 과목에는 「고급 수학 Ⅰ」과 「고급 수학 Ⅱ」가 포함된다.

공통 교육과정		
1. 수학		
선택 교육과정		
〈기본 과목〉	〈일반 과목〉	〈심화 과목〉
1. 기초 수학	1. 수학 I 2. 수학 II 3. 확률과 통계 4. 미적분 I 5. 미적분 II 6. 기하와 벡터	1. 고급 수학 I 2. 고급 수학 II

[그림 Ⅱ-1] 수학과 교육과정의 교과목 구성

공통 교육과정 기간에 다뤄지는 수학 교과목의 문서 체제를 예로 들어 도식화하면 다음과 같으며, 선택 교육과정 기간의 9개 교과목의 문서 체제도 이와 동일한 방식으로 구성되어 있다. 여기서 각 교과목의 '3. 목표'는 2007 개정 교육과정의 '1. 성격'과 '2. 목표'의 두 부문의 진술을 통합하여 진술하고 있다. 특히 「수학」 교과목의 목표의 경우, 예전에 분리하여 제시되어 있던 초등학교와 중학교의 교육 목표가 통합, 진술되었다.



[그림 Ⅱ-2] 수학 교과목의 목표 및 성취 기준

나. 영역 구분의 변경

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 제7차 개정의 것과 마찬가지로, 학교급별 특성을 감안하여 초등학교와 중학교 각각의 내용 영역을 구분하였으며, 초등학교의 경우 '규칙성과 문제 해결' 영역을 '규칙성'으로 변경하였다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 모든 학교급 및 모든 수학 교과목에 걸쳐 수학적 과정의 요소로서 문제 해결 활동을 전 영역 및 세부 내용에 걸쳐 적극 반영하도록 강조하고 있기 때문이다.

2007 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중·고등학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	확률과 통계		확률과 통계
	규칙성과 문제 해결		기하

➡

2009 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	규칙성		확률과 통계
	확률과 통계		기하

[그림 Ⅱ-3] 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 영역명

03 학교급별 내용 변화

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 학교급별, 학년군별 내용의 변화는 기본적으로 학교 현장에서의 창의성 활동을 실제적이고 효율적으로 실행하기 위한 것으로, 학습 내용의 적정화 및 학년별 내용 분량이 조정되었다. 수학과 교육과정의 총 10개 교과목에 대한 주요 변화 내용을 학교급별로 살펴보면 다음과 같다.

가. 초등학교

(1) 수와 연산

초등학교의 수와 연산 영역에서 가장 큰 변화로는 자연수 및 분수의 지도 시기를 재조정하고, 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강화한 점을 들 수 있다. 또한 사칙연산의 계산 결과를 어림한 후 어림한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다.

(2) 도형

2007 개정 교육과정에서 평면도형의 각 구성 요소에 대한 학습 후 도형의 언어적이고 명시적인 정의를 통해서 도형 개념을 도입하는 방식을 대신하여, 2009 개정 교육과정에서는 도형의 모양 인식 및 분류 활동을 토대로 하여 도형 및 그 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 더불어 이름을 먼저 학습한 후 점차 분석적, 명시적으로 도형의 개념 및 성질을 학습할 기회를 제공하였다. 한편 2007 개정 교육과정에서 분산되어 지도되었던 각, 삼각형, 사각형 관련 단원의 내용들을 각각 통합적으로 취급함으로써 학생들의 개념 구조의 체계적 형성을 돕고자 하였다. 또 초등학생의 인지 수준에 적합하지 않은 내용으로 간주되는 사각형의 포함 관계나 수학 학습의 계열상 초등 수학에서 다루는 것이 적합하지 않은 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 및 회전체를 삭제하였다.

(3) 측정

측정 영역은 실생활과 밀접하게 관련되어 있으므로, 실생활과 관련지어 측정의 필요성을 인식하게 하고 측정 및 어림 활동을 통하여 양감을 기르는 데 중점을 두었다. 측정 영역에서의 계산은 측정 결과 간의 단순 연산이나 단위 환산은 축소하고, 측정의 관점에 중점을 두도록 하였다. 길이, 무게, 들이, 넓이의 양감을 기르는 데 중점을 두고, 측정 영역에서 합과 차를 계산하거나 단순한 단위 환산 연습은 약화하였으며, 들이 및 무게의 덧셈과 뺄셈은 실생활 문제 상황을 통하여 다루도록 하였다. 또한 부피의 양감을 강조하고 부피의 단위 사이의 환산이나 부피와 들이의 단위 환산은 삭제하여 학습량을 감축하였다.

(4) 규칙성

2007 개정 교육과정에서 '규칙성과 문제 해결' 영역은 주로 문제 해결 방법, 규칙 찾기, 비와 비율, 비례 등을 포괄하였다. 2009 개정 교육과정에서는 '문제 해결'이 다른 영역의 내용적 성격과 달리 과정적 성격을 띠고 있으며 수학 교과 전 영역에서 고루 지도되어야 한다는 취지에서 '문제 해결' 부분은 전 영역으로 재편하고, 영역명은 '규칙성'으로 설정하였다. 규칙성 영역의 주요 변화로는 각 학년에 분산되어 있던 규칙 찾기 활동을 통합하고 탐구 활동 및 놀이를 활용하고자 하였다. 비율 중 할, 푼, 리나 연비는 그 중요도 및 쓰임새를 재고하여 삭제하였으며, 방정식은 중학교의 학습 내용과 중복하여 다루어지고 있으므로 초등학교에서는 삭제하고 중학교의 '일차방정식'으로 이동 통합함으로써 학습량을 감축하였다.

(5) 확률과 통계

확률과 통계 영역에서의 가장 큰 변화는 줄기와 잎 그림, 경우의 수와 확률을 중학교로 이동 통합하고, 초등학교에 가능성의 개념을 도입한 것이다. 줄기와 잎 그림은 학습량 감축 및 학문 내에서의 개념 간 관련성을 고려하여 중학교의 통계 영역과 의미 있게 연결되도록 상향 이동하였다. 또한 경우의 수와 확률은 초등학교와 중학교에서 내용 중복 및 학습량 감축의 취지에서 중학교로 이동 통합하였고, 확률 개념의 계열적 구성이라는 측면에서 가능성이라는 개념을 초등학교 5~6학년군에 도입하였다.

이상으로 초등학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 시간의 덧셈과 뺄셈 약화 (3～4학년군)
- 사각형의 포함 관계 삭제 (3～4학년군)
- 할, 푼, 리 삭제 (5～6학년군)
- 등식의 성질 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 방정식 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 연비의 삭제 (5～6학년군)
- 겉넓이와 부피 통합 및 부피와 들이 사이의 관계 삭제 (5～6학년군)
- 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 삭제 (5～6학년군)
- 회전체 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 가능성 도입 및 확률 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 줄기와 잎 그림 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동

나. 중학교

(1) 수와 연산

수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념으로서 수의 개념과 연산에 대한 이해는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 따라서 수와 연산 영역은 수의 개념과 연산에 대한 이해를 높이고 이후의 학습과 연계될 수 있는 필수적인 요소만을 선정하였다. 또한 집합은 고등학교로 상향 이동하였고, 근삿값은 삭제하였다.

(2) 문자와 식

문자는 생활 주변이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 간단하게 표현하고 의사소통을 원활히 할 수 있게 해준다. 문자와 식 영역에서는 학생들이 자연스럽게 문자를 사용할 수 있도록 문자와 식을 실생활 문제 해결의 맥

락에서 다루게 하고, 수학이 현실 세계의 상황과 밀접한 관련이 있다는 것을 학생들에게 인식시켜야 한다. 이를 위해 방정식, 부등식과 그의 활용은 독립적인 중영역이 아닌 하나의 영역에서 통합하여 학습하도록 구성하였다. 또한 방정식과 부등식의 학습에 있어서 용어 사용에 대한 학습자의 부담을 고려하여 필요 이상의 용어 정의를 제한하였다.

⑶ 함수

2007 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육과학기술부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직하다. 이에 2009 개정 교육과정에서는 함수 개념의 도입 방법의 변화를 도모하고, 정의역, 공역, 치역 등의 용어를 삭제하였다.

⑷ 확률과 통계

확률과 통계는 중학교 수학에서 실생활과 관련성이 매우 깊은 영역이다. 중학교에서는 자료의 정리와 표, 그래프의 해석, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계, 확률의 계산, 대푯값과 산포도의 내용이 다루어진다. 본 개정안에서는 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수 · 학습 방법의 변화를 도모하였다. 2007 개정 교육과정과 달라진 내용은 학습량 감축을 위해 '누적도수의 분포'를 삭제하고, 탐색적 자료 분석의 한 방법인 '줄기와 잎 그림'을 도수분포와 그래프 학습 내용에 추가한 것이다.

⑸ 기하

수학 교육에서 증명은 전통적으로 학생들에게 꼭 가르쳐야 하는 주요 대상으로 인식되어 왔다(NCTM, 2000). 그러나 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는 데 어려움을 느끼기 때문이다.

2009 개정 교육과정에서 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서 학생 활동을 중시하고 증명 대신 추측 활동을 강조한다. 이를 위하여 다음 표에서와 같이 2009 개정 교육과정에서는 '증명할 수 있다' 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

〈표 Ⅱ-2〉 '추측과 정당화' 강조에 대한 내용 비교

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
5 삼각형과 사각형의 성질(2학년) ① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다. ② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.	5 삼각형과 사각형의 성질 ① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 제시한 '이해하고 설명할 수 있다'는 '정당화(justification)'를 의미하는데, 이는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 말한다. 이 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다. 인식론의 관점에서 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 대변할 수 있다(http://www.wikipedia.org). 이때 수학적 증명은 논리적 연역법을 의미한다. 기하 교육에서의 증명은 기하 지식을 증거로 삼으며 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다(신이섭 외, 2011).

정당화를 유도하는 교수 방법은 다양한 형태로 나타날 수 있다. 예를 들면 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제 해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육은 기본적으로 학생의 활동에 의존한다. 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다.

이와 같이 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

한마디로 중학교의 기하 영역에서는 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 '정당화' 수준의 교육을 지향하고자 하였다. 또한 2007 개정 교육과정의 단발성 주제와 상대적으로 의미가 적은 용어들을 삭제하고, '원과 직선', '원주각' 두 영역을 원의 성질로 묶어 하나의 영역으로 내용을 축소시켜 다루는 등, 전체적으로 학습량을 경감하였다.

이상으로 중학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 집합 삭제
- 근삿값 삭제
- 십진법과 이진법 삭제
- 수학 개념과 실생활 활용의 통합
- 방정식 관련 용어 약화
- 함수 개념 도입 방법의 변화
- 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
- 통계 교수 · 학습 방법의 변화
- 누적도수의 분포 삭제
- 줄기와 잎 그림 추가
- 정당화에 의한 기하 교육 강조
- 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소
- 원의 성질 내용 축소

다. 고등학교

(1) 일반 과목

고등학교의 일반 과목에 해당하는 6개 교과목의 주요 변화 내용을 개략적으로 살펴보면 다음과 같다.

■ 수학 I

「수학 I」은 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 가장 기초가 되는 과목이다.

「수학 I」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '수와 연산', '문자와 식', '기하' 영역의 일부를 재구성한 것으로 크게 '다항식', '방정식과 부등식', '도형의 방정식'의 3개 영역으로 구성된다. '다항식' 영역에서는 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해를, '방정식과 부등식' 영역에서는 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 여러 가지 부등식을 다룬다.

「수학 I」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교

하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 실수 삭제
- 복소수와 이차방정식의 연계 강화
- 다항식의 약수와 배수 약화
- 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

수학II

「수학Ⅱ」는 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」과 「수학Ⅰ」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 「수학Ⅰ」과 함께 기초가 되는 과목이다.

「수학Ⅱ」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '집합과 명제'와 '함수' 영역의 내용, [수학Ⅰ]의 내용 중 '수열' 영역과 '지수함수와 로그함수'의 내용 중 일부를 재구성한 것으로 크게 '집합과 명제', '함수', '수열', '지수와 로그'의 4개 영역으로 구성된다. '집합과 명제' 영역에서 집합, 명제를, '함수' 영역에서 함수, 유리함수와 무리함수를, '수열' 영역에서 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을, '지수와 로그' 영역에서 지수, 로그를 다룬다.

「수학Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 집합 내용 통합
- 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
- 함수 영역의 내용 약화
- 수열의 약화 및 이동
- 지수와 로그 내용 약화 및 이동

확률과 통계

「확률과 통계」는 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 또는 「미적분Ⅰ」까지 이수한 학생이 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 또는 자연 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「확률과 통계」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 고등학교 [수학]의 '확률과 통계' 영역, 선택 과목인 [미적분과 통계 기본]과 [적분과 통계]의 '확률', '통계' 영역, 그리고 [적분과 통계]의 '순열과 조합' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '순열과 조합', '확률', '통계'의 3개 영역으로 구성된다. '순열과 조합' 영역에서 경우의 수, 순열과 조합, 분할, 이항정리를, '확률' 영역에서 확률의 뜻과 활용, 조건부확률을 '통계' 영역에서 확률분포, 통계적 추정을 다룬다.

「확률과 통계」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
- 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
- 공학적 도구의 활용 강조

미적분 I

「미적분Ⅰ」은 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「미적분Ⅰ」은 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅰ]의 '수열의 극한' 영역과 [미적분과 통계 기본]의 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법' 영역의 내용을 기본으로 하고 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역의 내용 중 '롤의 정리, 평균값 정리의 이해와 활용'에 대한 내용을 추가하여 '수열의 극한', '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'의 4개의 대영역으로 구성된다. '수열의 극한' 영역에서 수열의 극한, 급수를, '함수의 극한과 연속'에서 함수의 극한, 함수의 연속을, '다항함수의 미분법' 영역에서 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을, '다항함수의 적분법' 영역에서 부정적분, 정적분, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅰ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 수열의 극한의 이동 통합
- 롤의 정리와 평균값 정리의 이동
- 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제
- 용어 수정(중간값 정리를 사이값 정리로 수정)

■ 미적분 II

「미적분Ⅱ」는 「미적분Ⅰ」을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「미적분Ⅱ」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 [수학]의 '함수' 영역, [수학Ⅰ]의 '지수함수와 로그함수' 영역, [수학Ⅱ]의 '삼각함수', '함수의 극한과 연속'과 '미분법' 영역, [적분과 통계]의 '적분법' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', '미분법', '적분법'의 4개 영역으로 구성된다. '지수함수와 로그함수' 영역에서 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프, 지수함수와 로그함수의 미분을, '삼각함수' 영역에서 삼각함수의 뜻과 그래프, 삼각함수의 미분을, '미분법' 영역에서 여러 가지 미분법, 도함수의 활용을, '적분법' 영역에서 여러 가지 적분법, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
- 삼각함수 통합 및 약화
- 미분법 및 적분법의 내용 조정

■ 기하와 벡터

「기하와 벡터」는 '미분과 적분'을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「기하와 벡터」는 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역과 [적분과 통계]의 '적분법' 영역, 그리고 [기하와 벡터]의 '이차곡선', 공간도형과 공간좌표', '벡터' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '평면 곡선', '평면벡터', '공간도형과 공간벡터'의 3개 영역으로 구성된다. '평면 곡선' 영역에서 이차곡선, 평면 곡선의 접선을, '평면벡터' 영역에서 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면 운동을, '공간도형과 공간벡터' 영역에서 공간도형, 공간좌표, 공간벡터를 다룬다.

「기하와 벡터」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
- 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

(2) 기본 및 심화 과목

고등학교의 경우에는 일반 과목에 해당하는 6개 교과목 이외에, 기본 과목인 「기초 수학」과 심화 과목인 「고급 수학Ⅰ」, 「고급 수학Ⅱ」가 새로 신설되었다.

「기초 수학」은 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다.

「기초 수학」의 내용은 '수와 식의 계산', '방정식과 함수', '피타고라스 정리와 삼각비'로 구성된다. '수와 식의 계산' 영역에서는 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산을, '방정식과 함수' 영역에서는 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수를, '피타고라스 정리와 삼각비' 영역에서는 피타고라스 정리, 삼각비를 다룬다.

「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화 과목으로 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제 해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목이다. 「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공한다.

「고급 수학Ⅰ」의 내용은 '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을, '그래프' 영역에서는 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용을 다룬다. 「고급 수학Ⅱ」의 내용은 '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성된다. '복소수와 극좌

표’ 영역에서는 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식을, ‘미적분의 활용’ 영역에서는 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용을, ‘편미분’ 영역에서는 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용을 다룬다.

04 내용 체계

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 ‘수학’ 교과목(초등학교 1학년～중학교 3학년)의 내용 체계는 다음과 같다.

학교급 / 학년군 / 영역	초등학교		
	1～2학년군	**3～4학년군**	**5～6학년군**
수와 연산	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈 • 나눗셈 • 자연수의 혼합 계산 • 분수 • 소수 • 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 분수의 덧셈과 뺄셈 • 분수의 곱셈과 나눗셈 • 소수의 곱셈과 나눗셈 • 분수와 소수
도형	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 도형의 기초 • 평면도형의 이동 • 원의 구성 요소 • 여러 가지 삼각형 • 여러 가지 사각형 • 다각형	• 합동과 대칭 • 직육면체와 정육면체 • 각기둥과 각뿔 • 원기둥과 원뿔 • 입체도형의 공간감각
측정	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 시간 • 길이 • 들이 • 무게 • 각도 • 어림하기(반올림, 올림, 버림) • 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)	• 평면도형의 둘레와 넓이 • 무게와 넓이의 여러 가지 단위 • 원주율과 원의 넓이 • 겉넓이와 부피
규칙성	• 규칙 찾기	• 규칙 찾기 • 규칙과 대응	• 비와 비율 • 비례식과 비례배분 • 정비례와 반비례
확률과 통계	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기	• 자료의 정리 • 막대그래프와 꺾은선그래프	• 가능성과 평균 • 자료의 표현 • 비율그래프(띠그래프, 원그래프)

영역 \ 학교급 / 학년군	중학교		
	1～3학년군		
수와 연산	• 소인수분해 • 최대공약수, 최소공배수 • 정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산	• 순환소수 • 유리수와 순환소수의 관계	• 제곱근의 뜻과 성질 • 무리수 • 실수의 대소 관계 • 근호를 포함한 식의 사칙계산
문자와 식	• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 덧셈과 뺄셈 • 일차방정식	• 지수법칙 • 다항식의 덧셈과 뺄셈 • 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 • 다항식의 나눗셈 • 등식의 변형 • 연립일차방정식 • 부등식의 성질과 일차부등식 • 연립일차부등식	• 인수분해 • 이차방정식
함수	• 함수의 개념 • 순서쌍과 좌표 • 함수의 그래프	• 일차함수의 의미와 그래프 • 일차함수의 활용 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 이차함수의 의미 • 이차함수의 그래프의 성질
확률과 통계	• 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 • 도수분포표에서의 평균 • 상대도수의 분포	• 경우의 수 • 확률의 뜻과 기본 성질 • 확률의 계산	• 중앙값, 최빈값, 평균 • 분산, 표준편차
기하	• 점, 선, 면, 각 • 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계 • 평행선의 성질 • 삼각형의 작도 • 삼각형의 합동조건 • 다각형의 성질 • 부채꼴에서 중심각과 호의 관계 • 부채꼴에서 호의 길이와 넓이 • 다면체, 회전체의 성질 • 입체도형의 겉넓이와 부피	• 이등변삼각형의 성질 • 삼각형의 외심, 내심 • 사각형의 성질 • 닮은 도형의 성질 • 삼각형의 닮음조건 • 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 • 닮은 도형의 성질 활용	• 피타고라스 정리 • 삼각비 • 원의 현, 접선에 대한 성질 • 원주각의 성질

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목 이외에 고등학교 선택 교과목의 내용 체계는 다음과 같다.

〈기본 과목〉

■ 기초 수학

영역	내용
수와 식의 계산	• 수의 연산 • 문자의 사용과 식의 계산 • 다항식의 계산
방정식과 함수	• 일차방정식과 일차함수 • 이차방정식과 이차함수
피타고라스 정리와 삼각비	• 피타고라스 정리 • 삼각비

〈일반 과목〉

■ 수학 I

영역	내용
다항식	• 다항식의 연산 • 나머지정리 • 인수분해
방정식과 부등식	• 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식 • 여러 가지 부등식
도형의 방정식	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동 • 부등식의 영역

■ 수학 II

영역	내용
집합과 명제	• 집합 • 명제
함수	• 함수 • 유리함수와 무리함수
수열	• 등차수열과 등비수열 • 수열의 합 • 수학적 귀납법
지수와 로그	• 지수 • 로그

■ 미적분 I

영역	내용
수열의 극한	• 수열의 극한 • 급수
함수의 극한과 연속	• 함수의 극한 • 함수의 연속
다항함수의 미분법	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용
다항함수의 적분법	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용

■ 미적분 II

영역	내용
지수함수와 로그함수	• 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 • 지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수	• 삼각함수의 뜻과 그래프 • 삼각함수의 미분
미분법	• 여러 가지 미분법 • 도함수의 활용
적분법	• 여러 가지 적분법 • 정적분의 활용

■ 확률과 통계

영역	내용
순열과 조합	• 경우의 수 • 순열과 조합 • 분할 • 이항정리
확률	• 확률의 뜻과 활용 • 조건부확률
통계	• 확률분포 • 통계적 추정

■ 기하와 벡터

영역	내용
평면 곡선	• 이차곡선 • 평면 곡선의 접선
평면벡터	• 벡터의 연산 • 평면벡터의 성분과 내적 • 평면 운동
공간도형과 공간벡터	• 공간도형 • 공간좌표 • 공간 벡터

〈심화 과목〉

■ 고급 수학 I

영역	내용
벡터와 행렬	• 벡터 • 행렬과 연립일차방정식
일차변환	• 일차변환과 행렬 • 고윳값과 행렬의 거듭제곱
그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프 • 그래프의 활용

■ 고급 수학 II

영역	내용
복소수와 극좌표	• 복소수의 극형식 • 극좌표와 극방정식
미적분의 활용	• 미분의 활용 • 미분방정식 • 적분의 활용
편미분	• 이변수함수의 뜻 • 극한과 연속 • 편미분 • 편미분의 활용

III. 수학 교과서의 개발 동향

01 구성주의와 수학 교과서

구성주의의 수학 교육관은 '학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성'이라는 교육관에 기초한다고 볼 수 있다. 구성주의를 수학 교육의 실제에 적용하고자 하는 사람들은 수학적 지식이 외부의 강화에 의하여 학습자에게 전달될 수 있다는 견해에 동의하지 않는다. 즉, 구성주의자들은 지식이 학습자의 내면 세계에서 적절한 경험을 통해 자주적으로 구성된다고 생각하고 있으며, 이것은 곧 학생들이 수학 지식을 수동적으로 받아들임으로써 획득하는 것이 아니라 각자 능동적으로 재발명해 나감으로써 (수학 지식을) 구성하는 것을 뜻한다. 따라서 구성주의적 입장을 취하는 수학 교육 관계자들은 전통적인 방식의 수학 교육을 개선할 수 있는 하나의 대안으로서 구성주의적 수학 교육을 제안하고 있는 것이다. 특히 사회적 구성주의자들은 이제껏 전통주의자들의 주된 관심사였던 수학 지식의 실제에 대한 인식론적인 논의보다는 수학 지식에 대한 구성주의적 교수-학습의 가능성에 관심을 두었다.

'구성주의'는 그 말 자체가 광범위한 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라 '구성'이라는 용어도 모호하기 때문에 이를 해석하는 견해가 다양하다. 그러나 현재 우리나라 수학 교과서에는 교구 및 소프트웨어 등의 조작 활동의 필요성, 개인별 능력 차를 고려한 수준별 교재의 필요성, 의사소통을 고려한 교과서 개발의 필요성 등의 반영이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구 사항은 조작적 구성주의자로 불리는 피아제의 발생적 인식론의 중심 아이디어인 '조작', 급진적 구성주의자들이 지식의 진리 자체에 관한 논의를 거부하고 초미의 관심사로 여긴 '개인 중심적' 구성이나 '생장 원리', 사회적 구성주의자들이 객관성을 사회성으로 대치하면서 도입한 사회적 합의의 수단인 '의사소통'을 교재 구성에 반영하자는 생각과 크게 다르지 않다.

02 구성주의적 수학과 교수-학습 원리의 반영

수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습 원리는 다음과 같다.

가. 교과서에 학생 중심적 개별화의 원리 반영

구성주의의 기본적인 주장인 지식의 자주적 구성의 원리는 학생들로 하여금 갈등 국면에 대처하여 동화와 조절의 메커니즘에 따라 반영적 추상화의 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나가는 과정을 보여 주고 있다. 이것은 질문을 중심으로 하는 상호 작용적인 추측 및 논박에 의한 수학 교수-학습의 바탕(모델)이 된다. 구성주의는 지식의 자주적 구성을 그 근본 원리로 하고 있지만, 교수-학습의 차원에서 논의되는 지식은 '주관 독립적'인 의미에서의 객관적 지식이 아니라, 규약과 협정 등의 수단을 통하여 '공통 주관적'인 의미에서의 객관성을 가지게 된다.

따라서 수학 교육학적 구성주의에서 취하고자 하는 관점은 바로 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 것이며, 이러한 관점은 학생 자신에 의한 지식의 능동적인 재발명을 목표로 하는 오늘날의 수학 교육에서 요구되고 있는 관점과 일치한다고 볼 수 있다. 이를 위해서는 학생 중심적인 개별화 수업이 가능하도록 수학적 과제가 제시되어야 할 것이다. 학생이 스스로 생각하고 해결 전략을 궁리해 낼 수 있는 기회를 부여함으로써 학습자 자신이 다양한 사고를 할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

나. 교과서에 질문 중심적 상호 작용의 원리 반영

학교 밖의 사회나 교사들은 지금까지 대체적으로 수학 지식의 가치를 인정하고 수학 교육의 당위성을 이해해 왔을지 모르지만, 아마도 학생들은 그러한 당위성을 이해하지 못하였을 것이고, 결과적으로 수학을 의미 없는 것으로 받아들일 수밖에 없었을 것이다. 그렇다면 유효한 수학 교육이 이루어지기 위해서는 학생들이 배워야 할 수학, 즉 학교 수학이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 함은 물론 수학 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 학생들의 적극적 의지가 수반되어야 한다. 결국 이를 교과서에 반영하는 것은 질문 중심의 상호 학습이 일어날 수 있도록 과제를 제시하는 형태가 될 것이다. 구성주의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용을 매우 중요시한다. 즉, 교사가 적절한 질문으로 학생의 응답을 유도해 냄으로써 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다. 따라서 의미 지향적인 활동 수업이 이루어지도록 교과서가 구성되어야 할 것이다.

다. 교과서에 의미 지향적 활동의 원리 반영

위에서 살펴본 수학 지식의 자주적인 구성이 교수-학습에서의 학생의 의미 지향적 활동이나 교사의 적절한 질문만으로 가능한 것은 아니다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식 구성을 하는 학습자 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 불가능하다. 다시 말해 효율적인 수학 교수-학습을 위해서는 학습자의 내면화된 자주적 활동이 학생의 교수-학습 활동에의 참여 의지 및 교사의 적절한 질문과 더불어 반드시 필요하다.

이때 이 내면화된 자주적 활동의 메커니즘을 구성주의가 설명해 주고 있는바, 이것이 바로 반영적 추상화이다. 그렇다면 학습자가 반영적 추상화의 과정을 경험할 수 있도록 교재가 구성되어야 함은 물론이다. 부연 설명하면, 교과서는 여러 가지 활동을 통하여 익힌 의미 있는 경험을 반성하여 자기 자신의 지식을 구성할 수 있도록 구현되어야 한다는 것이다.

03 구성주의적 관점에서의 교과서 개발 방향

위에서 살펴본 구성주의적 관점에 기초한 바람직한 수학 교과서를 구현하기 위하여 고려되어야 할 사항은 다음과 같다.

가. 교과서 저자의 철학

교과서에는 교과서 저자 나름대로의 철학이 배어 있어야 한다. 지금까지의 교과서에 제시된 교육과정상의 내용들은 누구나 합의할 수 있는 객관적이고 보편적인 것만을 다루도록 하는 것이 불문율이었다. 그러나 이제는 절대적 진리처럼 내용이 전개되던 교과서의 역할과 권위보다 학생들의 주체적인 사고의 참여를 촉발시킬 수 있는 '저자'의 역할과 권위를 우위에 두어야 할 것이다. 이때 교과서 저자는 자신이 왜 그러한 주제에 관심을 가지는지, 그것이 왜 중요한 것인지를 드러내고 어떻게 그 주제를 전개해 나아가는지 등에 관한 자신의 철학과 견해를 피력하고, 또 다른 견해들과의 차이를 드러내어 맥락화시킬 수 있도록 한다.

나. 안내형 교과서

전통주의적 입장에서의 교과서 방식은 학습 목표에서 추출된 세부적 요소들을 논리 정연하게 제시하는 '제시형 교과서'라고 할 수 있으며, 구성주의적 관점에서 보는 교과서는 교과서에 제시된 내용들에 학습자와의 실질적인 상호 작용을 통해서 그 의미가 발현될 수 있도록 소재적 가치를 부여하는 '안내형 교과서'라고 할 수 있다. 즉, 안내형 교과서는 학습하기를 기대하는 내용들을 직접 제시하는 대신 학습자로 하여금 구조적 변화를 경험하도록 안내하는 역할을 하는 내용으로 교과서를 구성하는 방식

을 취한다고 할 수 있다. 안내형 교과서는 개인적인 관심, 해석, 활동 등 학습자의 주체적인 역할에 큰 비중을 두고 학습자의 적극적이고 당사자적인 관여를 요청하고 있다.

이홍우(1997)는 “교과를 가르치되 학생의 경험과 의미 있게 관련되도록 가르쳐야 한다.”라고 주장하면서 학생들은 자신이 배우는 다른 내용들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 뿐만 아니라 학교에서 배운 것을 다른 상황에 쉽게 적용할 수 있어야 한다고 하였다. 그러기 위해서는 날로 팽창하는 지식을 모두 가르치려고 할 것이 아니라, 그중에서 기본 또는 핵심이 되는 것만을 골라 가르쳐야 하며, 이와 같이 기본이나 핵심이 되는 것을 ‘지식의 구조’라고 명명하였다. 즉, 지식의 구조를 알면 팽창하는 모든 지식을 하나씩 따로따로 배우지 않더라도 그 기본적인 것에 비추어서 나머지를 쉽게 이해할 수 있다고 본 것이다.

다. 관계적 이해를 도모하는 교과서

기존의 교과서는 지극히 제한된 지면에 방대한 내용을 소개해야 하기 때문에 가능한 한 핵심적이고 확실한 원리나 개념들을 중심으로 간결하고 함축적인 방식으로 제시하고 있다. 이와 같이 주요 주제나 개념들을 피상적으로 제시하는 방식은 교사와 학생들로 하여금 ‘관계적 이해’를 도모하기보다는 수학적 언어와 기호를 이용하여 외우고 재생해 내는 데 급급하게 하는 ‘도구적 지식’을 가지도록 한다.

도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 보다 적은 지식이 필요하기 때문에 학습 결과에 대한 보상이 즉각적이고 명백하다. 그러나 이 방식은 수학의 전체 영역에 서로 연결되는 기초적인 개념을 교수-학습하기보다는 서로 분리하여 각각의 주제를 교수-학습하는 것이기 때문에 기대하는 학습이 이루어진다고 보기 어려울 것이다.

반면 관계적 이해를 통한 학습은 마치 나무가 영양분을 찾아서 뿌리를 뻗어 나가거나 동물이 먹이를 찾아 새로운 지역을 탐험하는 것과 같이 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하는 것에 비유될 수 있다. 그러므로 관계적 이해를 촉구하기 위해서는, 즉 핵심적인 원리나 개념을 습득하게 하기 위해서는 그러한 내용을 얻을 수 있도록 해당 절차를 안내(유도)하는 방식으로 교과서를 구성하도록 한다.

라. 질문 중심의 개념 전개

기존의 교과서는 수학적 지식을 대부분 완성된 형태로 제시하는 하향식 전개 방식을 택하고 있다. 또한 단원의 마무리 단계는 기본 문제, 연습 문제, 종합 문제, 심화 문제 등으로 구성되어 있다. 따라서 계산이나 풀이 형식의 정착을 위해 학생들이 풀어야 할 문제들이 교과서에 산적해 있다. 이런 상황에서 학생들은 문제 풀이를 위한 반복 훈련을 하는 데 주력하게 되고, 교사 역시 이러한 기능을 정착시키기 위한 내용 전개로 수업을 이끌어 가는 경향이 있다.

이를 개선하기 위해서는 현재 교과서에 수록되어 있는 반복 연습형의 문제들을 줄이고 그 대신 수학적 개념과 문제 해결의 절차를 이해시키는 데 주력함으로써, 학생들에게 ‘수학을 한다.’는 것이 이미 배운 개념이나 공식, 절차를 바로 적용해서 연습 문제를 푸는 것이 전부가 아니라는 사실을 인식시켜야 할 것이다.

마. 수학적 유용성 강조

수학은 실제로 모든 학문의 기초로서 우리의 일상생활뿐만 아니라 공학, 의학, 경제, 사회, 문화 등 여타 분야에 지대한 영향을 미치고 있음에도 불구하고 이에 대한 인식이 부족하다. 지금까지의 교과서의 내용 및 그 전개 방식을 살펴보면 교사나 학습자로 하여금 여러 단원의 내용들이 서로 독립된 것이라고 오판하기 쉽게 되어 있다. 따라서 앞으로의 교수-학습 자료에는 단원 간의 내용 연계성을 강조함으로써 학생들 각자의 스키마를 구성하는 데 도움이 되도록 해야 할 것이다. 특히 교과서에

수학의 활용성에 대한 구체적인 내용을 단원별로 또는 전체적으로 기술하고, 과학이나 미술 등 다른 교과목과의 연결성을 찾는 내용도 포함시켜 학생들이 수학의 중요성을 알도록 해야 할 것이다.

바. 다양한 교구 및 도구 활용

수학 수업에서의 교구 사용은 추상적인 수학적 개념을 구체물로 모델링한다는 데 가장 큰 의의가 있으며 이를 통해서 학생들은 수학적 절차나 공식보다는 그 이면에 내재되어 있는 의미를 알 수 있게 된다. 또 교구는 학생들이 직접 만지면서 다루기 때문에 학생 중심적인 개별화 수업을 가능하게 할 뿐만 아니라 2~4명의 소집단 학습을 통하여 집단별 그리고 전체 토론이 이루어짐으로써 반영적 추상화를 경험할 수 있게 한다. 우리나라의 수학 교육과정은 컴퓨터와 계산기의 사용을 교사나 학교의 재량에 따라 사용하도록 권장하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서는 이들을 수업에 언제, 어떻게 활용해야 하는지를 잘 모르고 있는 실정이다. 그러므로 교수-학습 자료에 컴퓨터나 계산기 등의 활용 지침 및 방안에 대한 자세한 설명이 수록되어야 할 것이다.

04 수준별 수업의 운영

가. 수준별 수업의 운영 방식

수학과의 경우 수준별 수업은 1996년부터 현장에서 서서히 실시되기 시작하여 제7차 단계형 수준별 교육과정의 취지에 따라 더욱 활성화되었다. 수준별 수업과 예전의 단계형 수준별 교육과정의 운영은 그 접근 방법이 다르다고 할 수 있겠으나, 학생의 수준에 적합한 교육 내용을 다루고자 하는 점에서 기본 취지는 동일한 것으로 볼 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 기본 과정과 심화 과정의 학습 내용이 명료히 구분되어 제시되어 있지 않지만, 수준별로 개념 설명의 접근 방법을 차별화하고 해당 문제들의 난이도를 조정한다면 분단 수업이나 이동 수업을 진행하기가 용이할 것이다. 이렇듯 수준별 수업은 전통적으로 해 왔던 일제 수업의 폐단을 줄이고, 교사들의 다양한 교수-학습 자료 개발을 활성화시키며 학습자 주도의 학습의 중요성을 인식시키는 등 현장 교육을 긍정적으로 이끌 것이다.

이렇듯 수준별 수업은 학생의 성취 수준에 따라 수준별로 반을 편성하여 동일한 학습 진도 내에서 학습 심도를 달리하여 지도하는 '동진도-이심도' 방식을 취하는 것이 바람직하다. 이에 따라 수준별로 적합한 수업을 진행하기 위해서는 기본적으로 교육과정에 제시된 기본 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 각 수준별로 다루어야 할 학습 내용의 정도와 방법을 차별화하도록 한다. ◎〈표 Ⅲ-1〉 참조 이때 한 차시의 수업 내용을 기준으로 하거나 또는 교과서의 한 소단원을 기준으로 하여도 무방하다.

〈표 Ⅲ-1〉 수준별 수업 운영 방식

반 수준	수준별 수업 과정		
상	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	발전 과제 해결
중	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	단순 과제 해결
하	내용 수준	기본 내용	
	수업 방식	선수 학습 내용의 이해 → 개념 이해 → 단순 과제 해결	

나. 수준별 수업의 효율적 운영 방안

수준별 수업을 효율적으로 운영하기 위해서는 다음 사항에 유의해야 할 것이다.

(1) 학습자의 눈높이

개인차에 따른 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하여 적절히 운영하여야 한다. 즉, 수준별 수업 운영을 위한 노력으로 우선 각 수준에 따라 수업 내용, 수업 진도 등이 적절한지 검토하여야 한다. 이때 무엇보다도 중요한 것은 수준별 수업을 위한 수업 내용, 수업 진도 등이 교사 또는 수학 교육 관련 전문가의 눈높이가 아닌 '학습자'의 눈높이에 맞춰져야 한다는 점이다.

(2) 내용의 차별화

수준별 개념에 입각한 교수-학습의 차별화는 수준에 따른 '학습 내용의 차별화'를 의미하는 것으로, '학습 내용의 차별화'란 각 수준별로 다루는 학습 내용 그 자체의 차별화를 말하는 것이다. 그런데 2009 개정 교육과정에는 학생들의 수준에 상관없이 모든 학생들이 공통으로 다루어야 하는 내용이 명시되어 있다. 그러므로 '학습 내용의 차별화'란 현행 교육과정에 기초한 공통 필수 격의 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 수준별로 중점을 두어 다루어야 할 '주요 내용'을 차별화하는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 '문항의 난이도'뿐만 아니라 각 수준에 적합한 '내용의 차별화'에 기초를 둔 수준별 학습 자료가 개발되어야 할 것이다.

(3) 귀납적 학습법

수학 수업을 전개해 나가는 데 있어서 일반적으로는 개념 및 원리를 설명하고 이에 따른 예제를 푼 뒤 반복 연습 문제를 푸는 '연역적 방식'을 취하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 예 또는 예제들을 통하여 그에 부합되는 학습 내용들을 체계적으로 정리하는 '귀납적 방식'을 취함으로써 학습의 이해를 보다 높일 수도 있다. 특히 학습 결손이 명백히 드러난 학생들에게 지극히 한정된 몇몇 문제의 풀이로 학습 내용을 이해시키기는 어렵다. 그러므로 각 수준별로 구체적인 예 또는 예제를 통하여 그에 부합되는 학습 내용(개념, 원리, 법칙 등)을 정리해 나가는 귀납적 방식의 수업도 병행해야 할 것이다.

(4) 소집단별 수행 과제 활동

수준별 능력에 따른 과제(open-response tasks)를 제시하여 학생들이 과제를 수행하면서 어떤 수학적 지식을 사용하고 또 어떻게 접근해 나가야 하는지 등에 관하여 스스로 탐색해 볼 수 있도록 해야 한다. 그러므로 45분의 수업 시간에 모든 활동이 이루어져야 한다는 제한된 시각에서 벗어나 수업 이외의 시간을 활용하여 좀 더 발전 지향적인 장 · 단기 과제를 다루는 것이 바람직할 것이다. 특히 소집단별 수행 과제 활동은 본인이 속한 집단의 구성원들과 그 결과를 기록하여 발표할 수 있는 '의사소통' 능력의 발휘가 가능하므로, 이를 통하여 다양한 자료를 수집, 표현, 분석, 해석함으로써 과제를 성공적으로 수행할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 수학적 문제 해결

01 문제 해결의 의미

20세기 초에 이루어진 문제 해결에 대한 논의는 1960년대의 '새수학' 운동과 1970년대의 '기본으로 돌아가기' 운동과 같은 과정을 거치면서 크게 부각되지는 못하다가, 1980년대에 들어 기초 기능으로서의 문제 해결력에 대한 관심이 높아지기 시작하면서 부흥기를 맞게 된다. 미국의 수학교사협의회인 NCTM(1980)이 'An Agenda for Action'에서 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 함을 선언한 이래 1980년대는 문제 해결의 시대라고 할 만큼 이에 대한 다양하고 활발한 논의가 이루어졌다(황혜정 외, 2012, 재인용).

이 같은 문제 해결의 조류는 우리나라의 수학 교육과정에도 서서히 등장하였다. 제3차 교육과정에서 급격하게 도입되었던 수학 교육 현대화의 내용은 제4차 교육과정에서 경감되고 정선되면서 지나치게 어려운 내용보다는 수학의 기초적 기능을 배양하고 문제 해결력을 신장시키는 데 관심을 가지게 되었다. 이어 제5차 수학과 교육과정에서도 수학 내용을 정선하면서 문제 해결력의 신장을 강조하였으며, 제6차와 제7차 교육과정에서는 문제 해결력의 신장을 위한 지도 내용, 전략, 방법 등을 구체적으로 제시하여 문제 해결력의 지도가 보다 적극성을 띠게 되었다.

또한 2007 개정 교육과정에 이어, 2009 개정 교육과정 문서의 모든 교과목의 '교수-학습 방법' 부분에도 문제 해결에 관한 다음과 같은 내용이 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011).

수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수-학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 문제 해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
(2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
(3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
(4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

02 문제의 의미와 유형

가. 문제의 의미

문제 해결에서의 '문제'는 해결의 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 문제보다는, 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제 해결 과정에서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다. 예를 들어 문제 해결이라고 하면 이차방정식의 근의 공식을 배운 후에 근의 공식을 적용하여 주어진 이차방정식의 해를 구하는 것과 같이 배운 내용을 단순하게 적용하여 해를 구하는 연습 문제를 떠올릴지도 모른다. 그러나 최근 수학 교육에서 중요시되는 문제 해결은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준의 것이 아니다. 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않은 것이다. 문제의 해결에 이르는 알고리즘이나 풀이 방법이 이미 주어져 있거나 알려져 있다면 그 문제는 진정한 의미의 문제라고 보기 어렵다.

나. 문제의 유형

문제의 유형을 분류하는 데에는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 '정형 문제'와 '비정형 문제'로 구분하는 것이다.

■ 정형 문제(routine problems)

이미 제시된 알고리즘을 사용한다. 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제가 해당된다.

■ 비정형 문제(non-routine problems)

문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제 해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 고안하여 풀어야 하는 문제를 말한다.

03 문제 해결 과정

폴리아(Pólya, 1957)는 수학적 문제 해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하여 제시하고 있다.



다음 표는 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 적절한 질문과 권고의 예이다.

〈표 Ⅳ-1〉 문제 해결 단계별 질문의 예

문제 해결 과정		해당 질문
문제 이해	문제를 이해하는 단계로, 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하며 문제를 분석하는 단계이다.	• 미지인 것, 주어진 것은 무엇인가? • 자료는 무엇인가? • 조건은 무엇인가? • 그림을 그려 보고, 적절한 기호를 붙여라.
계획 작성	문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제 해결 전략을 이용하게 된다. 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 한다.	• 전에 그 문제를 본 적이 있는가? • 친숙한 문제 중에서 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. • 유사한 문제는? • 문제를 푸는 데 필요한 조건을 모두 사용했는가?
계획 실행	해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.	• 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라. • 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? • 각 단계가 옳다는 것을 설명할 수 있는가?
반성	문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지 알아본 뒤, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 비교해 본다.	• 결과를 점검할 수 있는가? • 풀이 과정을 점검할 수 있는가? • 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? • 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가?

한편 문제 해결 전략이란 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크룰릭과 루드닉(Krulick, Rudnick, 1984)은 문제 해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제 해결 전략을 구분하였다.

04 문제 해결의 예

다음에 주어진 문제를 폴리아(Pólya, 1957)의 문제 해결 4단계를 따라 풀어 보면 다음과 같다.

> ㉮ 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라고 하면, 가로의 길이는 얼마인가?

① 문제의 이해

문제에서 구하려는 것은 가로의 길이이며, 문제에서 주어진 것은 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라는 사실이다.

② 계획 세우기

직사각형의 세로의 길이를 x라고 하면, 가로의 길이는 $2.5x$가 된다. 직사각형의 둘레의 길이는 네 변의 길이의 합과 같으므로 $x+2.5x+x+2.5x=35$

③ 계획의 실행

방정식을 풀면 $7x=35$, 즉 $x=5$이므로 가로의 길이는 $2.5\times5=12.5$(cm)이다.

④ 풀이의 반성

풀이 과정을 검토하여 잘못된 곳은 없는지 확인한다. 또 다른 방법으로도 문제를 해결할 수 있는지 조사한다. 이 문제의 경우 다음과 같이 풀 수도 있다.

가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배이므로

$$(\text{가로의 길이}):(\text{세로의 길이})=2.5:1=5:2$$

이고, 둘레의 길이가 35 cm이므로

$$(\text{가로의 길이})+(\text{세로의 길이})=\frac{35}{2}=17.5$$

따라서 가로의 길이는 $17.5\times\frac{5}{7}=12.5$(cm)이다.

㉮와 유사한 문제를 다음과 같이 만들어 풀어 본다.

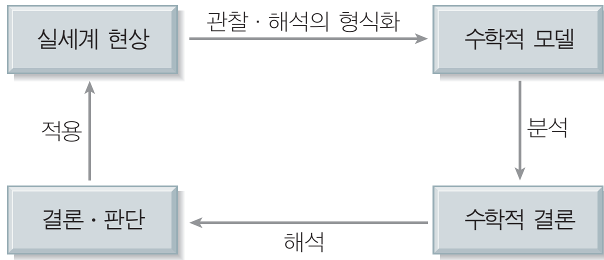
> 둘레의 길이가 35 cm인 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 3 cm 더 길 때, 가로의 길이를 구하여라.

05 문제 해결 과정과 수학적 모델링

가. 문제 해결 과정과 수학적 모델링

수학적 모델링은 문제 해결의 특징을 지니지만, 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 한다는 점에서 문제 해결과 차별화된다(NCTM, 1991). 즉, 수학적 모델링은 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 이루는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하는 수학화의 과정을 중시한다. 특히 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안하여 내면화하거나 해결해 가는 과정은 모델링 과정의 전이가 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 또한 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상생활과의 연결성을 강조한다. 이것은 수학 학습의 초점이 완결된 지식의 획득이 아니라 지속적인 모델의 구안과 수정을 통한 본 개념의 이해에 맞추어져야 함을 의미한다.

일상생활에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에서 제기된 문제를 해결할 수 있다. 수학적으로 의미 있는 모델을 구성하는 모델링 과정은 4단계의 순환 과정으로 구성되며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

NCTM(1991)의 '*Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 설명하고 있다.

① 현상을 관찰하여 그 현상에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고, 문제에 중요한 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
② 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
③ 적절한 수학적 분석을 구축한 모델에 적용한다.
④ 결과를 얻어 내고 그 결과를 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

요약하면 수학적 모델링은 실세계의 여러 현상을 수학적인 수단에 의해 정리하고 조직하는 활동으로, 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악, 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 활동 과정이다. 이러한 수학적 모델링을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 이미 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제 해결 과정에 강력한 수단이 된다. 따라서 수학적 모델링을 통하여 수학 교육에서 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다(Niss, 1989).

- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어지고 있는 것임을 이해한다.

나. 수학적 모델링의 예

연못에 있는 물고기의 수를 조사하는 다음 상황을 통해 수학적 모델링을 살펴보자.

(1) 문제 상황

이 게임의 목적은 연못에 있는 물고기의 수를 알아내는 것이다. 이러한 정보는 연못을 관리하고 물고기에 대해 파악하는 데 도움을 줄 것이다. 연못에 있는 물고기의 수를 어떻게 추측할 수 있겠는가?

(2) 필요한 수학 개념

비와 비율

(3) 모델

우리는 연못에 있는 물고기의 수를 알 수 없으므로, 물고기의 수를 n마리라고 하자.

우선 몇 마리의 물고기를 잡아 물고기가 다치지 않게 꼬리에 표를 달고, 다시 그 물고기들을 연못에 놓아준다고 가정하자. n마리 중에서 p마리를 잡아 표시를 하고, 며칠 후에 q마리의 물고기를 잡는다면 그중에는 꼬리표를 단 것도 있고 달지 않은 것도 있을 것이다. 이때 꼬리표를 단 물고기의 수를 x라고 하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{p}{n}=\frac{x}{q}$$

p, x, q 모두 측정값이므로, n의 값을 구할 수 있다.

다음은 앞과 같은 활동을 10번 시행한 예이다.

표본 채취 순서	꼬리표를 단 물고기의 수	표본 수
1	3	15
2	0	15
3	3	15
4	1	15
5	2	15
6	4	15
7	6	15
8	2	15
9	4	15
10	2	15

이때 좀 더 정확한 n의 값을 구하기 위해서는, x의 평균 $\overline{x}$를 구하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$n=\frac{pq}{\overline{x}}$$

예를 들어 처음에 표시한 물고기의 수(p)가 10마리이고 다섯 번 표본을 채취했다면, $\overline{x}=1.8$, $p=10$, $q=15$이므로 $n=83$이다.

위와 같이 연못에 있는 물고기의 수를 측정하는 이러한 과정을 'the capture/recapture' 방법이라고 하며, 이것은 게임으로도 사용되고 보존청에서도 활용되고 있다.

V. 수학과 평가의 특징 및 방법

01 수학과 평가의 동향

1990년대 초 미국 NCTM의 대안적 평가의 강조를 기점으로, 우리나라에서도 1995년 교육개혁위원회 주체의 '세계화 · 정보화 시대를 주도하는 신교육체제 수립을 위한 교육개혁방안' 수립, 1997년 서울시교육청의 초등학교 새물결 운동, 1997년 제 7 차 교육과정 개정 등의 영향으로 학교 현장에 수행 평가가 점차 반영되기 시작하였다. 결과적으로 우리나라에서도 전통적인 평가 방식의 변화 및 개선의 필요성이 인식되면서 새로운 평가 방법의 도입이 요청되고 이를 위한 대안으로 학교 현장에의 수행 평가 도입 및 활성화 방안이 추진되었으며, 이는 현재까지 지속적으로 강조되고 있다.

이에 대한 실례로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든 교과목에서의 평가 부분은 다음과 같이 진술되어 있다(교육과학기술부, 2011).

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수-학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력
(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력
(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력
(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력
(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

이상의 내용을 중심으로 우리나라 수학과의 평가 동향을 간략히 살펴보면, 우선 평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있으며, 최종 결과의 평가보다는 과정에 대한 평가를 강조하고 있다. 또한 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다. 특히 최근 들어 인지적 영역에 대한 평가뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 평가도 점차 강조되고 있다. 아울러 평가 상황에서도 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구 및 교구의 적절한 이용을 권장하고 있음을 알 수 있다.

02 수학과 평가의 원리

학교 수학에서의 평가는 주로 교수-학습 방법의 개선을 위하여 이루어져야 하는데, 그동안 평가는 수준 판정 및 선발의 목적을 달성하는 데 치중해 왔다. 이로 인해 평가는 학생들에게 도움을 주기보다 많은 심적인 부담을 안겨 주었으며, 그러한 평가 결과는 교사의 수업 방법을 반성하고 개선하는 데 그다지 활발히 활용되지 못하였다. 또 지식을 측정하는 지필 검사가 전적으로 활용되고, 창의력, 탐구력과 같은 고등 정신 능력과 흥미, 관심, 열의와 같은 정의적 능력을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 활용되지 못하였다. 이렇듯 잘못된 평가 방식은 교육 본연의 모습을 그르칠 수도 있지만, 반대로 올바른 평가 방식은 교육 본연의 모습을 찾는 데 절대적인 영향을 미친다. 이에 따라 수학 교과에서 점차 지향되고 있는 평가의 동향이나 특징에서 알 수 있는 바와 같이, 수학과 평가가 바르게 이루어지기 위해서는 다음과 같은 기본 원리가 지켜져야 한다(황혜정 외, 1997).

가. 발달적 교육관을 중시하는 평가

평가는 그 방향과 방법에 영향을 주는 기준하에서 선발적 교육관과 발달적 교육관으로 대별할 수 있는데, 발달적 교육관에서의 교육 평가는 학생의 선발이나 개인차를 내는 데 관심이 있는 것이 아니라, 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업 목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습 방법을 배치하기 위한 평가를 하게 된다. 또한 학생 간의 서열과 개인차를 내기 위한 평가 방법보다는 주어진 수업 목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업 목표 달성도의 평가에 그 관심이 집중된다.

발달적 교육관은 준거지향평가의 관점으로 귀결된다고 할 수 있다. 평가의 목적에 따라서 상대평가를 하여야 할 때가 있고, 준거지향평가를 하여야 할 때도 있다. 그러나 수학과 평가가 수학적 능력을 신장시킨다는 목적을 달성하기 위해서는 교사가 선발적 교육관보다는 발달적 교육관을 지녀야 한다. 그럼으로써 교사는 교육 목표의 달성도와 학생의 학습 과정에 더욱 관심을 기울이고 자신의 수업 방법과 평가 방법에 대해 보다 반성하며 학생 개개인에 적합한 교수-학습 방법을 적용할 수 있다.

나. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가

그동안 수학 교과에서 다양한 평가 방법이 사용되지 못한 주된 이유는 교사에게 주는 부담, 그리고 다양한 평가 방법을 활용할 수 있는 다양한 형태의 수업을 하는 데 교사가 익숙하지 못하기 때문이다. 또 수학에서는 지필 검사만으로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 평가할 수 있다는 잘못된 인식 때문일 수도 있다. 그러나 지필 검사만으로는 다양한 상황에서 다양하게 표현되는 수학적 능력을 종합적으로 바르게 평가할 수 없다. 수학이 타 교과목과는 다른 특성을 지니고 있다고 하더라도, 수학적 능력 역시 다양한 평가 방식을 통해서 바르게 평가될 수 있다. 이제까지의 일상적인 수업 방법을 탈피하여 학생들의 수학적 사고를 자극하는 새로운 수업 방법을 적용하여 보고, 또 이에 부합하는 새로운 방법으로 평가를 해야 할 것이다.

다. 문제 해결 과정을 중시하는 평가

현재의 수학과 평가에서는 정 · 오답 여부, 점수, 석차 등이 중요시되고 있으며, '학생이 어떠한 사고 과정을 거쳐서 이 문제를 해결하였는가?', '학생이 사고 과정에서 어떤 오류를 범해서 문제를 풀지 못하였는가?'는 중요시되지 않는다. 이는 다인수 학급에서의 평가의 효율성, 선발적 교육관, 상대적 평가관이 중요시되는 분위기 때문이다. 그러나 이러한 평가 방식이 계속 적용되면 학생은 사고 과정, 문제 해결 과정의 타당성보다 정 · 오답 여부에만 신경을 쓰기 때문에 학생의 수학적 사고 능력, 문제 해결력은 향상되지 못한다. 또 교사는 학생 개개인이 지닌 사고 과정의 결함을 알 수 없기 때문에 그러한 결함들이 발견되어도 치유되기 어렵다. 교사 역시 자신의 교육 방법을 반성해 가면서 학생을 지도할 기회를 가지기

어렵다. 그러므로 이러한 일을 가능하게 하려면 다양한 풀이 과정과 방법이 공유되는 해결(또는 수행) 과정을 중요시하는 평가가 이루어져야 할 것이다.

라. 정의적 영역의 능력을 중시하는 평가

정의적 영역의 평가는 수학적 지식 및 기능에 관한 인지적 영역의 평가 못지않게 중요하다. 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 가지고 공부를 하며, 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다. 최근 들어 우리나라에서도 정의적 영역에 대한 평가의 중요성이 점차 인식되고 있다. 이는 우리나라 학생들이 국제 학업성취도 비교 평가에서 수학 학업성취 수준은 세계 최상위권임에도 불구하고, 정의적 수준은 최하위권인 것으로 나타났기 때문이다. 많은 학생들이 수학은 재미없고 어려운 과목, 일상생활에 도움이 안 되는 과목, 대학 입시를 위한 과목 등 매우 부정적인 교과로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 우리 사회에 큰 우려감을 주고 있으며, 이에 대한 개선책이 요구되고 있다(박선화 외, 2010).

그럼에도 불구하고 우리의 현실에서 정의적 영역에서의 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 이유는 평가에서의 주관성과 교사의 주관적 판단을 중요하게 여기지 않고 신뢰하지 못하는 분위기, 평가상의 번거로움, 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 평가 도구나 자료의 부족 때문이다. 이에 따라 교사의 주관적 판단의 중요성을 인식하고 그것을 신뢰하며, 평가상의 번거로움을 최소화하고, 교사들이 손쉽게 이용할 수 있는 관찰 또는 면담지 등의 평가 도구가 개발되고 제공된다면, 정의적 영역에 대한 평가도 보다 활성화될 수 있을 것이다.

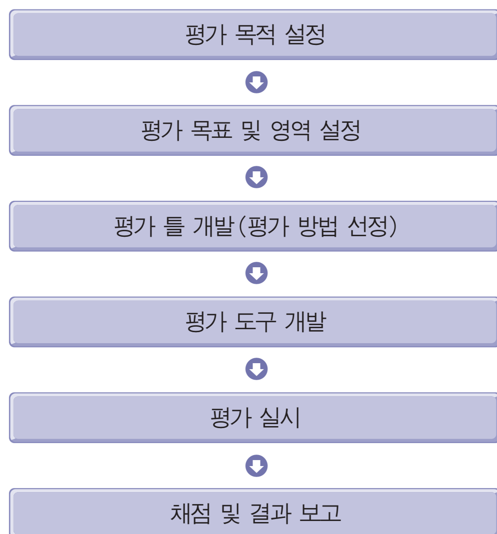
여기서 수학에 대한 정의적 특성의 의미와 구성 요소를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 한국교육과정평가원(박선화 외, 2010)에서는 수학에 대한 정의적 특성을 수학에 대한 경험으로 인하여 형성된 정서, 신념, 동기 등을 포함하는 심리적 특성으로 정의하여 제시하였다.

〈표 Ⅴ-1〉 수학에 대한 정의적 특성의 요소

범주	하위 요소	정의
정서: 비교적 강하게 단시간 동안 계속되는 감정. 희노애락, 애증, 공포, 쾌감 등	흥미	교과나 학습 주제 등에 대해 주관적으로 느끼는 선호도 및 학습 활동에 참여함으로써 발생하는 즉각적인 재미
	호기심	지속적이면서 일관되게 새로운 것을 추구하는 개인의 심리적 경향성
	수학 불안	수학 교과 자체 또는 수학과 관련된 일이나 문제 등에 대하여 긴장하고 두려워하거나 걱정하고 염려하는 심리 상태
신념: 어떤 아이디어, 사건, 행위 등과 같은 대상에 대해 여러 반응을 시도하고 다양한 시행착오의 과정을 반복하면서 형성된 가치 체계	수학관	문화적 가치와 사회적 기대를 경험과 학습을 통하여 내면화한 것으로 수학이 가지고 있는 교과로서의 특성과 그에 적절한 학습 방법에 관한 개인적인 관점
	가치 인식	사회적 맥락이나 학습자 자신의 삶의 맥락과의 관계 속에서 수학의 기능과 유용성에 대한 평가
	귀인	수학과 관련된 성공과 실패의 원인에 대한 개인적 지각으로 원인의 소재(내적 · 외적 요인), 안정성, 통제 가능성에 대한 추론
동기: 학습 활동을 유발하고 지속하게 하는 힘으로서 학습 활동을 의미 있고 가치 있는 것으로 보고 학습 활동으로부터 의도된 가치를 얻고자 하는 경향성	목표 지향성	성취 상황에서 개인이 과제를 수행하는 목표에 대한 개인의 지향성으로, 타인과 비교하거나 자신의 능력을 타인에게 증명하기 위한 목표인 수행 목표와 과제의 숙달이나 능력을 향상하기 위한 목표인 숙달 목표로 구분됨
	자기 효능감	목표 달성에 필요한 행동 과정을 조직하고 행하는 자신의 능력에 대한 믿음으로, 특정한 시간에 주어진 특정 과제를 잘 수행할 수 있는지에 대한 인식
	자기 조절력	개인적 목표 설정과 설정한 목표를 성취하기 위한 행동 조정으로, 장기적 목표 달성을 위해 바람직한 행동을 추구하고 그렇지 않은 행동은 억제하여 충동적이거나 즉각적이지 않고 스스로 문제를 신중하게 계획, 해결, 평가하려는 경향성

03 수학과 평가 절차

평가는 상황에 따라 다양한 형태로 시행되므로 모든 상황에 적용 가능한 평가 절차를 규명하기란 쉽지 않다. 하지만 교사가 평가 주체자가 되어 학생들의 수학적 능력이나 태도를 평가하는 경우에 초점을 두어, 평가 시행을 위한 기본 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅴ-1] 수학과 평가의 기본 절차

평가를 하고자 할 때 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다. 진단평가나 형성평가와 같이 교사가 자신의 수업에 대한 피드백을 얻기 위한 목적으로 평가를 실시한다면 수업을 진행하기 전이나 진행하는 도중에 평가를 실시하여 그 결과를 수업 개선에 활용하게 될 것이다. 반면 총괄평가와 같이 학생들의 성취 정도에 따라 등급을 결정하는 것이 목적이라면 보다 객관적인 평가 방법을 이용하며, 평가의 내용도 한 학기 또는 일 년 동안 학생들이 학습한 전체 내용을 포괄하는 것이 더 타당할 것이다. 이처럼 평가의 목적에 따라 평가 내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 할 것이다.

두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가 목적에 따라 평가하고자 하는 영역(이하 평가 영역)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육 목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육 목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가 영역의 교육 목표를 설정하는 것을 말한다.

세 번째 단계에서는 균형 있는 평가 도구 개발을 위하여 평가 틀을 개발하는 것이다. 평가 틀은 평가 영역의 교육 목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동 영역과 내용 영역, 평가 목표, 평가 문항 유형, 각 요소별 문항 출제 비율 등을 포괄적으로 포함한다.

또한 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육 목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정하여야 할 것이다. 예를 들어 총괄평가를 실시할 목적으로 특정 평가 영역을 선정하여 해당 교육 목표가 확인되었을 때, 인지적 영역 능력에 관한 평가를 실시하기 위해서는 이에 부합하는 평가 방법을, 정의적 영역 능력에 관한 평가를 실시하고자 할 경우에는 이에 따른 적절한 평가 방법을 사용해야 할 것이다.

네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가 틀에 부합하는 평가 도구를 개발하는 과정이다. 평가 도구 개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따라 모범 답안 및 채점 기준도 개발하여야 한다. 이때 '평가 도구 개발'이란 인지적 영역의 평가에서 지필 검사를 위한 평가 문항 개발, 채점 기준 및 예상 답안 작성과 정의적 영역에서의 평가를 위한 평가(주로 관찰 및 면담) 요목 개발, 기록 방법 작성 등을 총체적으로 일컫는 말이다.

다섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점 기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다.

마지막 단계로는 평가 목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

04 수학과 평가 틀 개발 시 유의 사항

학교 수학에서 수학 교육 목표를 내용과 행동 수준에 맞추어 평가하는 것은 바람직한 일이며, 이를 위해서는 수학과에 적합한 평가 틀을 마련하여야 한다. 평가 틀은 평가 도구 개발 및 평가의 전 과정에서 평가 방향과 평가 관련 항목을 선택하거나 결정할 때 판단의 준거가 된다. 평가 틀은 평가에 관한 보다 체계적이고 포괄적인 구조를 설명할 수 있다는 장점과 더불어 평가 문항과 내용 및 행동 영역의 적합성을 판정하고 설명하는 데 용이하다고 할 수 있다. 〈표 Ⅴ-2〉, 〈표 Ⅴ-3〉 참조

수학과 평가 틀을 개발하는 데 있어서 고려해야 할 제한 사항은 다음과 같다.

첫째, 일반적으로 평가의 목적은 우수 학생을 선발하려는 것이 아니고 학생들의 교육 성취 정도(수준)가 얼마나 되는지, 그리고 각각의 수준에 도달한 학생들이 얼마나 되는지 파악하는 데 있으므로 평가 틀이 학생들의 성취 수준을 골고루 측정해 낼 수 있도록 세워져야 한다. 그러므로 가장 기초가 되는 수준에서부터 우수한 학생까지의 성취 정도가 잘 드러날 수 있도록 다양한 수준의 문항으로 구성되어야 한다.

둘째, 가능하면 평가 요소를 적어도 내용 영역과 행동 영역으로 이원화하도록 한다. 특히 행동 영역을 설정하여 소홀하기 쉬운 '지식의 활용 또는 적용' 능력에 의미 있는 비중을 두도록 한다. 동시에 폭넓은 수준의 학업 성취의 정도를 파악할 수 있도록 행동 영역을 가장 기초적인 지식이나 단순 계산에서부터 보다 복합적인 사고를 요구하는 탐구나 문제 해결 능력까지 평가의 대상으로 삼아, 학생들이 어느 영역에 더 높은 성취를 보이는지 파악할 수 있도록 한다.

셋째, 평가 틀의 구성에 있어서 시대적 요구가 강한 행동 영역을 의도적으로 평가 틀에 포함시키도록 한다. 예를 들어 의사소통 능력과 같이 시대적으로 강력히 요구되고 있으면서도 실제 학교 현장에서는 소홀히 다루어지는 능력을 평가 틀에 과감히 도입함으로써 학교 교육과정 운영에 있어서 선도적 역할을 기대해 볼 만하다.

〈표 Ⅴ-2〉 수학과 평가 틀의 예

행동 영역 / 내용 영역	계산	이해	추론	문제 해결
수와 연산				
문자와 식				
함수				
확률과 통계				
기하				

〈표 Ⅴ-3〉 수학과 평가 틀에서의 인지적 행동 영역의 정의

행동 영역	정의
계산	여러 가지 계산법, 나아가 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	• 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력에 관한 것 • 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제 해결	• 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 • 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합 교과적(수학 외적)인 소재의 응용 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것

05 서술형 및 수행 평가 문항의 채점 방법

서술형 또는 수행 평가 문항 등에서 학생들은 문제(질문 내용)조차 이해하지 못하는 경우, 문제는 이해했으나 풀이 과정이 틀린 경우, 또는 풀이 과정은 옳으나 계산 과정이 미흡하여 실제로 결과를 나타내는 부분이 틀린 경우 등 여러 가지 반응을 나타낸다. 실제로 학생들의 문제 풀이를 평가하는 데 있어서 가장 어려운 부분은 여러 가지 유형의 오류들을 드러내는 풀이를 어떻게 평가할 것인가를 결정하는 일이다. 이때 풀이 과정을 중시하여 채점하는 방법으로는 '분석적 점수화 방법'과 '총체적 점수화 방법'을 들 수 있다(Charles, et. al., 1987).

먼저 '분석적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법을 말한다. 이때 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 영향을 주어서는 안 되며, 각 문항마다 채점 요소를 지나치게 세분화하지 않도록 한다. 분석적 점수화 방법은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 하지만, 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화한 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있다는 것이 주요 장점이다. 한편 '총체적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하는 대신, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법을 말한다.

서술형 및 수행 평가 문항의 채점을 위한 채점 기준은 주로 분석적 점수화 방법을 토대로 문제 이해, 문제 해결 과정, 답 구하기 등의 과정이 반영되도록 작성한다. 이를 작성하는 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 적절히 부여하도록 한다. 다음은 서술형의 문항에 대한 채점 기준을 분석적 점수화 방법으로 제시한 예이다.

【문항】

작년에 A 중학교의 학생 수는 1050명이고, 금년에는 작년보다 남학생은 4 % 증가하고 여학생은 2 % 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

【모범 답안】

작년의 남학생의 수를 x, 여학생의 수를 y라고 하면

$$\begin{cases} x+y=1050 \\ \frac{4}{100}x-\frac{2}{100}y=9 \end{cases}$$

이므로 $x=500$, $y=550$이다.

따라서

금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times 500=520$(명)

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times 550=539$(명)

【채점 기준】

영역 \ 요소	채점 요소	배점
문제 이해	작년의 남학생 수를 미지수로 정하기	1점
	작년의 여학생 수를 미지수로 정하기	1점
해결 과정	작년의 학생 수에 관한 식 세우기	1점
	작년보다 늘어난 금년의 학생 수에 관한 식 세우기	3점
답 구하기	금년의 남학생 수 구하기	2점
	금년의 여학생 수 구하기	2점
총점		10점

서술형 및 수행 평가 문항에 있어서 모범 답안은 채점 기준을 작성하는 데 있어서 구체적인 지침의 역할을 한다. 문항의 특징이나 성격에 따라 다르겠지만, 일반적으로 수학 교과의 특성상 피험자가 다양한 창의성을 발휘하여 평가자가 생각하지도 않았던 여러 가지 형태의 답을 제시할 가능성은 그리 높지 않다. 하지만 서술형 문항의 경우에는 답안을 작성하는 과정에서 실수나 오답의 가능성이 높으므로 이에 관한 채점 기준을 마련하여 채점 결과의 공정성을 유지해야 할 것이다. 이에 따라 모범 답안과 그에 따른 채점 기준을 구체적으로 마련하고 평가를 실시한 후 이미 작성된 채점 기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'하는 일은 매우 중요하다고 하겠다. 이는 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 미처 생각하지 못하였던 채점 요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고, 미비한 부분을 보완 · 수정하기 위함이다. 위와 같은 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

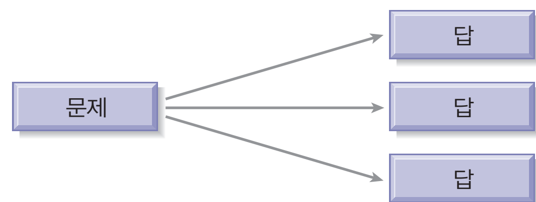


[그림 Ⅴ-2] 채점 절차

06 프로젝트

가. 프로젝트의 의미

프로젝트의 사전적 의미는 '실행 계획서'이지만, 수학 교육에서 프로젝트는 보다 넓은 의미로 무엇을 할 것인가뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다. 프로젝트는 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말하며, 이때 개방형 문제, 즉 열린 반응(open-ended, open-responded) 문제는 해답이 정해져 있지 않고 학생의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제를 말한다. 하지만 경우에 따라서 개방형 문제의 답은 모범 답안이 제한되지 않을 수 있다. 즉 결정되지 않을 수도 있다.



[그림 Ⅴ-3] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

【개방형 문제의 예】

숫자 4를 네 번 사용하고 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, 분수 등의 기호를 써서 0부터 9까지의 수를 만들어 보아라.

【풀이】

$0=4+4-4-4=44-44$

$1=\frac{4}{4}+4-4=\frac{44}{44}=\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\div\frac{4}{4}$

$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=4-\frac{4+4}{4}$

$3=\frac{4+4+4}{4}$

$4=(4-4)\times4+4=\sqrt{4+4+4+4}$

$5=\frac{4\times4+4}{4}$

$6=\frac{4+4}{4}+4=\frac{4+4+4}{\sqrt{4}}$

$7=\frac{44}{4}-4=\{4-(4\div4)\}+4$

$8=4+4+4-4=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$
$=4\times4\div4+4=4\times4-(4+4)$

$9=4+4+\frac{4}{4}$

학생들은 열린 반응의 과제들을 수행하기 위하여 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지를 결정해야 할 뿐만 아니라 때로는 어떻게 접근해 나아가야 할 것인가에 관한 수학적 방법까지도 결정해야 한다. 이에 따라 프로젝트는 학생들의 실제 생활과 직접 관련되어 그들의 고등 사고 능력을 발휘할 수 있는 문제 상황을 주제로 제시함으로써 과정 중심의 수행 경험을 하게 한다.

나. 프로젝트의 특징과 개발 시 유의점

프로젝트의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

둘째, 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 프로젝트는 소그룹의 협동 학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에 (말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

한편 다음은 프로젝트 개발 시 유의해야 할 사항이다.

첫째, 프로젝트는 학생들이 수학적인 안목에서 현상을 파악할 수 있는지, 또는 배운 수학적 지식을 사용하여 생활의 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 것으로, 판에 박힌 문제(정형 문제)를 지양하고 참신하고 새로운 성격의 주제(문제)를 개발하도록 한다.

둘째, 프로젝트의 채점을 위한 채점 기준은 총체적 점수화 방법과 분석적 점수화 방법을 적절히 고려하여 작성한다. 서술형 문항의 경우와 마찬가지로, 프로젝트의 채점 기준(표)의 작성 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 부여하도록 한다.

다. 프로젝트의 채점 방법

프로젝트의 수행 과정은 다음 〈표 Ⅴ-4〉와 같은 기록지를 사용한 자기 평가(self-assessment) 방법을 이용하여 학생 스스로 작성해 보게 하고, 이를 평가하거나 점검하는 것이 용이하며 바람직하다(황혜정 외, 1997).

〈표 Ⅴ-4〉 학생 자기 평가 기록지(예)

학생 자기 평가 기록지

단원명: ______________________

날　짜: ______년 _____월 _____일 _____교시

이　름: ______________________　　(_____학년 _____반 _____번)

주제(문제):

해설(풀이):

반성(소감):

자기 평가:

아주 못함(　　)　　못한 편임(　　)　　잘한 편임(　　)　　아주 잘함(　　)

교사 논평:



점선을 따라 자르세요.

한편 프로젝트의 전반적인 활동 과정 및 결과에 대하여 평가하고자 할 때, 다음과 같이 관찰에 의한 평정척도지를 활용하면 편리하다(Krulick 외, 1998).

〈표 Ⅴ-5〉 평정척도법을 이용한 과제 수행 능력 평가(예)

이름: ________________ 날짜: ________________

평정척도

1=불충분 2=만족 3=훌륭함

관찰(면담) 요목			0	1	2	3	논평
과제 수행 능력	주제 이해						
	해결 전략 선정						
	계획 수행						
	검토 및 반성						
	의사소통						
	태도						

07 관찰 및 면담

가. 관찰 및 면담의 특징

관찰 및 면담에서 평가자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰 내지 면담을 하면서 기록하게 된다. 이 방법은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있는 장점이 있다. 또한 관찰 및 면담은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다. 하지만 우리나라 교육 현실을 감안할 때, 독자적인 평가 기법으로서의 역할보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할의 의미가 크다.

특히 관찰의 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다. 또 관찰은 정규 수업 시간 중에 자연스럽게 이루어질 수 있고, 특정한 사고력에 중점을 두고 평가할 수 있으며, 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

관찰이나 지필 검사와 더불어 면담은 학생들과 직접 대화함으로써 문제 해결 상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의 '결과'를 도출해 내기까지의 사고 '과정'에 대한 통찰을 가능하게 하는 기법이다. 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

나. 관찰 및 면담의 유형

실제로 현장에서 사용할 수 있는 관찰법은 수업 시간에 교사가 학생들을 대상으로 실시하는 비참여 관찰로, 학생 전체 또는 소집단이나 개인별로 자연스럽게 행해질 수도 있다. 다만 교사가 수업을 진행하면서 관찰 결과를 기록할 수 있는 시간이 한정되어 있으므로, 학급 전체보다는 개별 또는 소집단을 대상으로 관찰을 실시하는 것이 효과적이다. 그런데 사실 비참여 관찰의 경우 객관적으로 관찰이 가능하나 관찰의 기회가 적고, 심리적으로 격리되어 있기 때문에 미세한 변화를 파악하기 힘들다.

한편 공식적 면담은 면담자가 미리 만들어진 일련의 질문을 가지고 응답자에게 질문하는 방법이다. 이때 각 면담에서는 똑같은 질문이 똑같은 방법으로 부과되므로, 공식적 면담은 질문지를 언어로 표현하는 방법이라고 볼 수 있다. 이에 반해 비공식적 면담은 면담 계획을 세우되 면담 목적만을 명백히 하여 융통성 있는 접근을 시도하는 방법이다. 따라서 연구자(교사)가 한 현상에 관한 적절한 질문들을 충분히 가지고 있지 않을 때 유용하다. 이러한 면담은 예정된 '질문군'이 없고 본질적으로 탐색전부터 시작한다고 볼 수 있다.

결국 면담이 공식적으로 진행되든 비공식적으로 진행되든, 교사는 주로 정규 수업 외의 상황에서 학생들과의 면담을 통해 그들과 직접 대화함으로써 그들이 수학 수업 상황에 어떻게 수용하고 대처하는지에 대해 보다 깊은 이해를 구할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 (비공식적) 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

특히 공식적 면담은 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별하는 데 유용하며, 비공식적 면담은 그들을 진단, 선별하는 것뿐만 아니라 그들의 능력에 따른 처치도 가능하다. 면담은 주로 개별적으로 진행하는 것이 상례이지만, 비공식적 면담의 경우에는 소그룹별로 면담을 진행하여 면담 대상자들끼리 보다 자연스러운 분위기에서 진행됨으로써 보다 정확한 정보를 얻을 수 있는 이점도 있다.

다. 관찰 및 면담 시 유의 사항

일반적으로 관찰을 통해 정기적으로 기록하여 평가하기 위해서는 관찰자인 교사의 많은 시간과 노력이 절대적으로 필요하며, 관찰 목적에 알맞은 현상을 포착하기 어려울 때도 있다. 또한 학생들의 반응을 관찰할 때 편견

을 가지게 되어 관찰 결과에 주관성이 개입될 여지가 있으며, 관찰의 대상이 되는 학생들 역시 관찰자인 교사를 의식하면서 행동이 달라질 수 있다. 사실 교사가 관찰만을 통하여 학생들의 다양한 행동이나 사고 과정 등을 정확히 파악하기는 어렵다.

관찰 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 뚜렷한 관찰 목적 또는 문제 의식을 가지고 관찰에 임하도록 한다.
- 관찰 계획을 치밀하게 세워야 한다.
- 부분과 전체의 관련을 지으며 관찰함으로써 피상적인 관찰이 되지 않도록 해야 한다.
- 객관적인 태도로 관찰해야 한다.
- 관찰 기간은 짧게 하고 누적시키는 방법을 쓰도록 한다.

공식적 면담의 경우에는 면담 도중 학생의 반응에 개입하는 일이 없으므로, 사전에 질문 내용들을 신중히 계획하여 작성하면 별 문제가 없으나, 비공식적 면담에서는 교사가 학생의 반응에 따라 수시로 질문하게 되므로 더욱 주의를 해야 한다.

면담 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 면담 시 교사의 반응이나 질문으로 인해 대화의 방향이 바뀌어서는 안 되므로 교사의 태도(반응)는 중립적 입장을 취해야 한다.
- 질문의 내용과 시기가 적절해야 한다.
- 학생이 편안하고 안정감을 가지도록 면접 환경과 조건을 구성해야 한다.
- 교사가 면담 시 기본적으로 갖추어야 할 태도는 중립적인 태도, 공정한 태도, 자연스러운 태도, 담화적인 태도, 친절한 태도이다.

라. 관찰 및 면담의 기록 방법

관찰 및 면담의 목적이 결정되면 대상, 장소, 시간, 기록 유형 등의 세부 계획이 진행되어야 하며, 이때 활용될 수 있는 기록 방법에는 체크리스트와 평정척도법 등이 있다.

체크리스트나 평정척도법은 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구되지만, 그 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다. 그러나 체크리스트나 평정척도법은 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못하는 행동이 발생하는 경우에는 적절한 기록을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.

관찰 및 면담의 자료(정보)를 수집하면, 그다음 단계로 그 정보들을 요약하고 행동의 패턴을 결정하는 작업이 필요하다. 물론 기록 형태에 따라 정보를 요약하는 방법이 다양하게 개발될 수 있다. 일반적으로는 관찰에 의해 기록된 자료들을 그래프 및 빈도, 시간, 가중치의 평균 등의 기술 통계 수치로 분석한다. 그러나 학교 현장에서는 기록된 자료를 진술문 형태로 요약하여 교사의 전문적 판단에 따라 필요한 조언을 하는 것이 보다 수월하고 바람직하며, 이는 학교생활기록부에서 각 교과에 대한 학생의 발달 상황을 작성하는 기초 자료가 될 수 있다.

관찰 및 면담은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제 집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역을 평가하는 데 용이하다. 다음 <표 Ⅴ-6>은 여러 정의적 영역에 대한 평가를 위하여 체크리스트를 사용하여 관찰 또는 면담이 가능한 구체적인 요목들을 제시한 예이다(박선화 외, 2010).

〈표 Ⅴ-6〉 정의적 영역 평가를 위한 체크리스트지(예)

체크리스트					
정의역 영역	관찰(면담) 요목	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
수학에 대한 흥미와 호기심	• 수학을 하는 것을 즐거워한다.				
	• 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다.				
	• 수학 수업 시간을 기다린다.				
	• 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.				
	• 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.				
수학에 대한 자신감	• 수학 공부에 자신감을 가지고 있다.				
	• 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다.				
	• 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다.				
	• 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.				
수학에 대한 불안	• 수학 수업이 어려울까 봐 걱정한다.				
	• 수학 성적이 나빠질까 봐 걱정한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 긴장한다.				
수학의 유용성 인식	• 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다.				
	• 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.				
과제 집착력과 의지	• 수학 공부를 열심히 한다.				
	• 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다.				
	• 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다.				
	• 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.				
창의적 사고	• 다른 사람의 방법을 그대로 따라 하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.				
수학 수업에의 참여	• 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다.				
	• 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다.				
	• 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.				

VI. 좋은 수업의 의미

01 좋은 수업에 대한 관점의 변화

어떤 수업이 좋은 수업인가에 대한 견해는 구성주의 이론의 도래와 함께 바뀌기 시작하였다고 볼 수 있다. 구성주의 인식론에서는 지식을 개인이나 집단이 적극적으로 만들어 낸 경험적 구성물로 본다. 즉, 학생들은 모든 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 학생 스스로 능동적 구성 활동에 의해 이를 형성한다는 것을 그 주된 요지로 삼고 있다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 개념을 탐구하고 개념 사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록, 다시 말해 구성 활동이 잘 일어날 수 있도록 총체적인 환경을 조성해 주는 것이다.

학습 기회의 제고라는 측면에서 좋은 수업을 진단할 때, 학습 기회란 수업을 통해 가르쳐진 것과 평가되어지는 것 사이의 중복 정도를 의미한다. 이는 수업 중에 다루어지는 교육과정의 내용과 평가의 내용이 수업의 주요 목표를 반영해야 함을 뜻한다. 그러므로 1980년대 이래로 교육과정의 개정은 교사가 아닌 학생 중심의 교육을 강조하고, 실생활과 학교 교육 내용을 연결시키며, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두어 왔다.

따라서 진정한 학습은 일상의 학습 상황에서 다양한 정보와 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 학생들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제를 해결하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다는 것이다 (von Glasersfeld, 1993).

다시 말하면 구성주의에 입각한 수학 수업의 방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아닌 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다. 학습은 사회 활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간, 혹은 교사와 학생 사이에 생각이나 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다(남승인, 1998). 이때 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다. 아울러 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며, 따라서 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영하여야 한다는 것이다. 이렇게 볼 때 중앙집권식 교육과정의 편성 · 운영을 탈피하고 현장 중심으로 전환함으로써 학습자들을 보다 창의적인 교육과정에 의해 가르칠 수 있게 된다고 본다(최승현 외, 2002).

〈표 Ⅵ-1〉 좋은 수업을 위한 교수-학습 관점의 변화

교수-학습 관점의 변화		
강의식 전체 수업, 교사의 지시 중심 수업	➔	경험적, 귀납적, 실제적인 학습
수업 시간 중 학습자의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보를 듣고 암기하기	➔	수업 시간 중 학습자의 능동성: 모든 학생들이 학습에 직접 참여하기
학습지, 시험지, 연습지 등의 활동	➔	고등 사고력을 강조한 중심 개념과 원리 배우기
모든 교과 영역의 많은 학습량을 교사가 직접적으로, 간단히 다루기	➔	학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임하에 학습자 자신이 직접 연구 과제를 결정하기
어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	➔	학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 가지기

성적이나 학업 경쟁을 강조하기	➡	교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동
능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	➡	다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
특별 프로그램을 대용하기	➡	교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도
표준화 검사를 사용하기	➡	교사들의 관찰로 얻어진 질적 형태의 기술적 평가 사용하기

02 수학과 좋은 수업의 조건

수학과 교과 특성을 반영한 '좋은 수업'이란 '좋은 수업'에 대한 범교과적 정의와 그 궤도를 함께하면서, 수학 수업과 관련하여 현장의 교사들이 제기하는 문제점들을 효과적, 현실적으로 해결해 나가고 있는 수업들이라는 가정하에, 현장의 수학과 수업 지도와 관련하여 제기되어 온 문제점을 감안한 수학과 좋은 수업 선정 기준은 다음과 같다(최승현 외, 2002).

가. 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

현장의 수학 교사는 수학과 목표와 본질에 부합되면서 학생들의 요구, 능력 및 흥미에 알맞게 교육과정을 재구성할 필요가 있다. 실제로 좋은 수업을 진행하는 교사는 장기적인 기대, 학습 목표, 계획, 학습 활동, 자료 및 평가의 모든 측면을 포함하여 교실 수준에서 실행된 교육과정을 계획, 실천 및 평가하여야 한다(NCTM, 1993). 그뿐만 아니라 수업 목표와 목표 달성을 위하여 모든 교육과정의 요소들을 결합한 일관성 있는 체제를 유지해야 한다.

교육과정과 학습 내용 사이의 일관성을 유지하는 것은 학생들로 하여금 유의미한 지식을 구성할 수 있도록 한다. 즉, 학생들이 학교 밖 생활에서도 쉽게 접근하여 활용할 수 있는 지식을 구성할 수 있도록 하여야 한다. 이때 교사는 (1) 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습 내용의 폭을 줄이고, (2) 학습 내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하며, (3) 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하고, (4) 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습 활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 할 것이다.

나. 수학 수업에서는 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치 있는 것임을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 해야 한다.

현장의 수학 수업에서의 문제점은 현실과 유리된 많은 양의 수학적 지식을 교과서나 틀에 박힌 수업 양식에 의존하여 가르친다는 것이다. 좋은 수학 수업을 위해서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 문제 해결의 과정에 관련된 다양한 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학생들이 설계한 문제 해결 활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 학교에서 배운 수학이 학교 밖의 다른 실제 상황들에서 활용될 수 없다면, 수학을 학습할 필요성이 줄게 된다. 즉, 학교에서 배운 수학 지식은 실생활에 적용될 때 보다 유의미해진다. 따라서 좋은 수학 수업이란 학생들이 수업 시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제 해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에도 적용할 수 있도록 가르치는 수업이다. 장래에 수학이나 과학과 관련된 직업에 종사하게 될 학생들뿐만 아니라 교양을 갖춘 시민이

되기 위하여 학교 수학 교육은 우리가 살아가고 있는 현실 세계에 대한 이해와 흥미를 길러 줄 수 있어야 한다(OECD, 2001).

학교에서는 도형의 넓이나 부피에 대하여 배우지만 실생활에서 어떻게 활용되는지, 어떤 경우에 필요한지를 파악하지 못한다면 이러한 내용들을 학습하는 의미가 반감된다. 그러므로 수학 교사들은 학교 수학을 대학 입시를 위한 과목으로만 중요하게 취급할 것이 아니라, 현실 세계를 살아갈 수 있는 수학적 소양을 갖춘 시민을 양성한다는 취지를 잊지 말고 가르쳐야 할 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 중요한 역할은 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다(NCTM, 1989, 1991). 그러므로 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생의 능력 양성을 위해 교사는 다음과 같은 측면을 강조하여 수업하여야 한다.

- 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.
- 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 학습한 내용과 관련된 교과 내 다른 영역과 타 교과 영역에 적용하도록 한다.
- 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백할 수 있도록 돕는다.
- 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

다. 수학 수업은 현대의 수학 지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다.

수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 수학적 입장도 변화되고 있다. 예를 들어 학교 수학에서는 규칙이나 공식으로 설명될 수 있는 필연적인 사건을 주로 다루는 반면, 실생활의 현상에서는 임의의 모델인 경우가 대부분이다. 이러한 변화의 원동력은 컴퓨터의 보급이다. 컴퓨터의 도입으로 지금까지는 생각지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 수학의 내용과 방법도 많이 달라졌다. 예를 들어 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 반올림한 값으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로 변화되었다.

컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다. 예컨대 저학년의 학생들도 계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배울 수 있다. 고학년의 학생들은 그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며, 그 결과 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있을 것이다(신동선 외, 1998). 이와 같이 공학적 기술 도구의 사용은 학습 환경을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 학습의 질을 향상시킨다. 즉, 학생들은 이러한 기술이 없었다면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험(simulation) 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 보다 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 가지게 한다.

라. 학생들의 선행 지식(기존 지식)을 고려한 수학 수업이어야 한다.

좋은 수학 수업은 새로운 지식을 선행 지식에 관련시킬 수 있는 수업이어야 한다. 그러나 학생들이 선행 지식을 지니고 있는 것만으로 바람직한 학습 결과를 가져오지는 않으며, 학생들이 선행 지식을 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행 지식에 관심을 기울이고, 이러한 선행 지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 비로소 학습이 촉진될 수 있다. 그러므로 수학과 좋은 수업을 위해서는 교사가 학생들이 이미 지니고 있는 선행 지식을 이끌어 내고, 직접적인 체험 활동이나 사고 활동을 통하여 새로운 개념을 도입하며, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다(Driver 외, 1995).

이와 같이 학생들이 선행 지식을 활성화하여 수학과 학습에 활용할 수 있도록 수업을 할 때, 교사는 다음과 같은 측면을 고려해야 한다.

- 교사는 학생들이 가지고 있는 선행 지식이 무엇인가 정확히 파악하여야 한다.
- 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 활성화하도록 수업 시작 시 수업의 내용에 대하여 논의한다.
- 때때로 학생들의 선행 지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로, 교사는 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사할 필요가 있다.
- 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어 수업 진행에 차질이 없도록 해야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 학습 내용을 연관지을 수 있도록 적절한 질문을 제공하여야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고, 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.
- 교사는 교수-학습에 관한 인지심리학의 이론에 초점을 맞추어 수업해야 한다.

마. 학습자 스스로 문제 해결 활동을 수행할 수 있도록 이끄는 수업이어야 한다.

좋은 수업이란 학생들로 하여금 주어진 수학 문제를 이해하고 그 풀이 과정을 추론하며 이를 이용하여 문제를 해결할 뿐만 아니라 교사나 다른 학생들에게 자신의 방법을 설명할 수 있도록 하는 일련의 학습 전략을 가르치는 수업이다. 보스니아도(Vosniadou, 2001)는 교사가 학생들에게 학습 전략들을 가르치기 위한 체계적인 노력을 할 때, 학생들이 실질적인 성과를 얻을 수 있다고 주장하였다. 이러한 학습 전략들은 학습 과정을 촉진하고 학습을 제고할 뿐더러 학생들이 주어진 상황에 적절한 방법으로 문제를 이해하며 이를 해결할 수 있도록 돕는다는 측면에서 중요하다. 그러므로 문제 해결에 있어서 보다 적용 범위가 넓을수록 성공적인 학습 전략이 된다.

여기서 중요한 것은, 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학을 하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 메타인지 학습 전략을 가르쳐야 한다는 것이다. 구체적인 학습 기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습 과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식한다는 것은 보다 고차원의 학습을 위해 중요하다. 즉, 학생들은 주어진 학습 목표 달성을 위해 자신의 학습 진행 과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고할 필요가 있다.

학습에서의 자기 조절(self-regulation)이란 학습자 자신이 스스로의 학습 과정을 평가하고 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발하는 것을 포함한다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써 학생들이 자기 조절적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

- 문제를 해결함에 있어서 학생 자신이 문제 해결 전략이나 방법을 계획하도록 한다.
- 사용 가능한 가장 효과적인 학습 전략들은 무엇이며, 이들을 어떻게 사용할 것인지를 알도록 가르친다.
- 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.
- 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

바. 학생들의 동기 유발이 가능한 수학 수업이어야 한다.

일반적으로 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 이는 수학 학습에 있어서도 마찬가지이다. 그러므로 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 수학 교사들은 동기 유발된 학습자를 원한다. 교사의 말과 행동은 학생들의 목표 달성 의지에 영향을 미치게 되며, 내적 동기가 유발된 학습자는 학습 성취를 위해 더 노력하게 된다. 교사가 학생들의 내적 동기 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

- 새롭고 흥미 있는 학습 과제를 제공함으로써 학생들이 호기심을 갖고 고차원의 사고 기술을 사용하도록 장려한다.
- 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 격려한다.
- 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.
- 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가한다.
- 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어를 사용하여 피드백할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

사. 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학 수업이어야 한다.

실제 상황에 기초한 평가 방법 중 하나인 수행 평가는 그 목적과 수행 과정, 그리고 평가 결과가 모두 일치하고 있다. 바람직한 평가는 수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, 평가가 수업과 일관될 뿐만 아니라 의도한 학습 목표와 일치하며, 나아가 수업의 방식과도 일관성을 유지하는 평가이다. 예를 들어 고차원의 분석과 추론 기술을 활용한 수업에서 학습한 것을 선다형 객관식 문항으로 평가하는 것은 수업의 방법과 평가 사이에 일관성이 결여된 경우이다. 교육 개혁의 중요한 한 부분을 차지하고 있는 수행 평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행 능력을 측정하고 반영하는 것이다.

좋은 수학 수업에는 수업에서 기대되는 학습의 본질, 사용된 학습 자료, 일관성을 유지한 다양한 평가 전략들이 포함된다. 수학과 좋은 수업에서의 평가는 학생들에게 기대되는 것과 결과에 대한 명확한 의사 전달이 요구된다. 이때 평가는 수업과 일관성 있게 통합되어 서로에게서 유용한 정보를 얻을 수 있도록 한다. 수업과 평가를 통합하기 위하여 교사들은 다음 사항들을 주목하여야 한다.

- 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습 표준을 개발한다.
- 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 상호 양립 가능한 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.
- 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.
- 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가 결과들을 교수-학습의 개선을 위해 활용한다.

학교 현장에는 학생들의 수준을 고려한 학생 개인 수준에 맞는 학생 중심 교육과정이 구현되어 있는데, 교사뿐만 아니라 교장, 교감 차원에서도 이에 적합한 평가 방법을 생각해 보아야 한다. 모든 실제 상황에 기초한 평가의 시행 및 운영을 교사에게만 맡긴다는 것은 교사에게 지나친 부담이 될 수도 있다.

VII. 수학과 수업 평가

01 수학과 수업 전문성의 의미

학교 교육에서 교사의 역할이 중요해지고 교사의 책무성에 대한 기대가 높아지면서, 세계 여러 나라에서는 우수한 교사를 확보함과 동시에 현직 교사의 전문성 발달을 촉진하고자 각별한 노력을 기울이고 있다. 이러한 상황에서 학생들의 학습을 평가하기 위한 활동과 평가 방법을 고안하고 그 효과를 경험한 교사들은 이러한 수업 전문성 기준의 유용성을 알고 있으며, 교사의 수업 전문성 평가에도 학생 평가와 같은 원리가 적용된다. 수업 전문성 기준에 비추어 교사의 수업 전문성을 평가(즉, 수업 평가)를 하기 위한 방법들이 제시되고 있으며, 이러한 평가의 시도 자체가 교사들의 좋은 수업 실행을 위한 하나의 기준이 될 수 있다.

구체적인 수학과 수업 전문성 기준 개발의 방향은 다음과 같다(임찬빈 외, 2006).

첫째, 수학 교사의 수업 활동을 총망라하는 포괄적인 기준을 제시한다. 다시 말하면 수학과 수업 전문성 기준은 교사의 수학 수업 전-중-후 활동인 수업을 준비하기 위한 과정-실제 수업 실행-수업 후 반성과 평가 · 향후 개선 노력 등을 종합적으로 다룬다.

둘째, 수학과의 모든 내용 영역에 공통적으로 적용할 수 있는 종합적인 기준을 제시한다. 즉, 특정 영역이나 단원에 국한하는 기준보다는 각 영역에 고루 적용할 수 있는 대표적인 기준을 중심으로 제시한다.

셋째, 각 기준 간의 상호 연계를 고려하여 제시한다. 즉, 수업의 흐름을 고려하여 각각의 기준을 독립적인 영역과 요소로 제시하되, 이들 간의 관계가 상호 의존적으로 연계됨을 보여 준다. 수업이란 복합적이고 다면적일 뿐만 아니라 수업의 제 양상은 상호 의존적이다. 이러한 다층적 위계 속에서 수업 평가 기준의 대영역을 설정하고 다시 중영역과 하위 요소로 세분하여 제시한다.

넷째, 목적과 상황에 따라 유연하게 선택할 수 있는 종합적인 기준 목록을 제시한다. 즉, 수학과 수업 평가 기준은 모든 수업에 획일적이고 고정적으로 적용하는 것이 아니라, 목적과 상황에 따라 기준들을 선정, 조합하고 수학과 각 영역의 특성에 따라 그것들을 변용하여 달리 적용할 수 있음을 고려한다.

다섯째, 수업 전문성 기준은 하나의 개별 기준도 다양한 방식으로 접근하여 판단할 수 있음을 전제하여 제시한다. 교사의 전문성과 수업의 양상은 한 가지 측면에서 살피기보다는 다양한 각도에서 접근하고 판단할 필요가 있다. 예전에는 주로 수업 활동에 초점을 맞추어 수업 평가가 이루어졌기에 교실 수업 관찰이 가장 강력한 평가 도구였지만, 수업 전문성은 수업 전-후의 활동을 모두 포함하므로 교실 수업 관찰만으로 기준의 달성 정도를 가늠하기 어렵다. 따라서 특정 기준이 달성된 정도를 판단할 때에는 전문성 기준 영역과 요소별로 다양하게 제시하고, 나아가 각각의 기준도 다양한 방법으로 적용할 수 있음을 전제한다.

여섯째, 수업 전문성 기준은 수업을 위한 장 · 단기적인 계획이나 단원 단위로도 활용할 수 있도록 충분히 고려하여 제시한다. 수업 전문성 기준의 적용은 하나하나의 수업에 국한하지 않으며, 수업 전-중-후를 포괄하여 설정하여야 한다.

요약하면, 수업 전문성 기준은 좋은 수업 활동의 실제를 특징짓는 요소들이라고 규정지을 수 있다. 그러므로 수업 전문성 기준은 (1) 초보 교사를 위한 지침, (2) 숙련된 전문가 교사를 위한 지침, (3) 개선 노력을 집중할 부분을 파악하는 구조, (4) 교사 집단 이외의 다른 공동체들과의 의사소통의 수단으로 사용될 수 있다.

교사의 수업 활동에 대한 전문성 기준이 마련되었을 때, 관계 당사자들은 공유된 개념과 가치 속에서 개선을 위한 노력을 어디에 집중할 것인지에 대한 논의를 할 수 있게 된다. 아울러 수업 전문성 기준에 교직의 임무와 역량, 우수한 교수 활동의 수준을 명확하게 규정해 놓음으로써 타 분야의 사람들로부터 신뢰받을 수 있고, 교직의 위상을 높일 수 있게 된다. 교사들은 교수 활동을 기술하는 공통된 용어의 가치를 익히 알고 있다. 또한 수업 전문성 기준은 교사들에게 '우수성'에 대한 합의된 기준을 제공함으로써 모범적인 교수 활동에 대한 교사들의 대화를 조직하는 역할을 한다. 이러한 대화를 통하여 경력자뿐만 아니라 초보자의 수행 수준을 향상시킬 수 있을 것이다.

한편 수업 전문성 향상을 위한 평가, 즉 수업 평가 기준에서 규정하는 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 주요 내용 학습에 참여할 수 있도록 지원하는 것이다. 수학과 수업 평가 기준의 구성 요소들은 이러한 목적하에 조직되며, 중요한 내용을 학습할 때 교사는 학생들과 함께 학습자 공동체를 조성해 나아가야 할 것이다.

대니얼슨(Danielson, 1996)은 초임 교사와 경력 교사들이 함께 활용할 수 있도록 보완한 수업 평가 기준을 제시하면서 복합적인 교수 활동을 4개 영역(계획과 준비, 교실 환경, 수업, 전문적 책임)으로 구분하였다(임찬빈 외, 2004, 재인용). 이 수업 평가 기준은 교사의 전문성 발달 단계를 파악하여 각 영역에 알맞은 해당 요소들을 제시함으로써 교사로 하여금 전문성을 계발하고 자기 반성에 활용할 수 있도록 하였다.

수업 평가 기준을 개발·실행하는 과정에서 교사는 공동의 연구를 해야 할 뿐만 아니라 평가 기준 개발을 뒷받침하는 원리와 목적에 대한 이론적 근거도 확보하여야 한다. 무엇보다도 수업 평가 기준을 개발하고 설계함에 있어서 주요 이해 당사자들인 교사, 전문가 집단, 정부 기관 등의 참여와 논의가 요구되며, 그에 대한 활용을 전제로 개발하여야 한다. 이때 주의해야 할 것은 교사 자신이 수업 평가 기준을 지원하는 결정적인 역할을 하여야 활용이 가능하게 된다는 점이다.

또한 수업 평가 기준은 자기 평가나 동료 평가, 상호 평가 등으로 활용될 수 있도록 보다 상세하게 개발되어야 하며, 교사의 가르치는 활동에는 일정한 기준이 있다는 점도 제시하여야 한다. 대부분의 교사들은 전문적인 교수 활동의 필수 요소들을 이해하고 있음에도 불구하고, 지극히 관념적인 수준에서 표현하는 경우가 흔히 있는데, 이 점을 특히 주의해야 한다. 동료 교사들뿐만 아니라, 학생, 학부모 및 사회의 다른 구성원들이 교사에게 요구하는 지식과 역량을 명시하는 수업 평가 기준은 좋은 교수 활동을 파악하고 알리며 보상할 수 있는 수단이 되기도 한다.

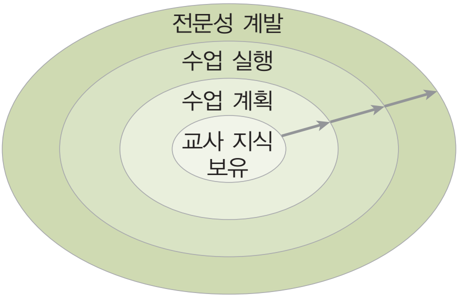
02 수학과 수업 영역 및 요소

가. 수업 평가 영역

수업 평가는 수업 전, 수업 중, 수업 후의 단계별로 진행할 수 있으며, 이러한 수업 단계는 '지식 보유', '수업 계획', '수업 실행', '수업 반성' 부문으로 구성되는데, 이는 교사가 좋은 수업을 하기 위해서는 다음과 같은 요건을 갖추어야 하기 때문이다.

- 교사가 알아야 할 것 ⇨ 지식 보유
- 교사가 준비해야 할 것 ⇨ 수업 계획
- 교사가 행해야 할 것 ⇨ 수업 실행
- 교사가 전문성 발달을 위해 해야 할 것 ⇨ 수업 반성

아는 것이 바로 수업의 실행으로 옮겨지는 것만은 아니지만, 일반적으로 교사가 계획을 세우고 준비하는 것은 수업에 영향을 주고, 이러한 모든 것은 실시한 수업에 대한 교사의 반성적 실천의 영향을 받게 된다. 이렇듯 [지식 보유] ⇨ [수업 계획] ⇨ [수업 실행] ⇨ [수업 반성]의 연계성이 있음을 나타내고 있다. [그림 Ⅶ-1] 참조



[그림 Ⅶ-1] 교사의 수업 단계

위의 [그림 Ⅶ-1]에서 알 수 있는 바와 같이, 교사의 '지식 보유'는 교사가 갖추고 있는 지식에 관한 이해 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 계획'은 본인이 준비한 수업 계획 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 실행'은 본인이 계획한 대로 수업을 충실히 실행하였다고 생각하는가, 그리고 '수업 반성'은 본인의 수업 실행 결과에 만족하는가 등을 반영하기 위한 것이다.

수업 평가를 위한 세부 영역 및 이에 관한 설명은 다음 〈표 Ⅶ-1〉과 같다.

〈표 Ⅶ-1〉 수업 평가 영역

수업 평가 영역		수업 평가 영역에 관한 설명	비고(수업 평가 요소)
교과 내용	• 교육과정 이해 및 재구성	교육과정 목표 및 내용에 관하여 정확히 이해하고, 이를 적절히 재구성하여 수업에 반영하는 것	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기
	• 수학 내용	소양이 되는 학교 수학 및 학문 수학에 관하여 충분히 이해하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기
	• 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 충분히 이해하고, 이를 효과적으로 수업에 반영하는 것	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기
	• 수학적 가치	수학적 가치와 중요성을 충분히 인식하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기
학습자 이해	• 학습자 수준	학습자의 인지 수준, 선행 지식, 학업 성취 수준 등을 파악하고 이를 적절히 수업 시간에 반영하는 것	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기
	• 학습자 오개념	학습자의 오개념을 인지하고 이에 대처하는 것	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기
	• 학습 동기	학습자의 관심 및 흥미도를 파악하고 이를 고취시키는 것	학습자 수준이 반영된 적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기
	• 수학적 태도	학습자의 자신감, 신념 등을 파악하고, 이를 증진시키는 것	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기
	• 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 파악하고, 이를 수업에 반영하는 것	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기
교수 학습 방법 및 평가	• 수업 목표 및 내용 반영	교육 목표 및 내용을 파악하고 이에 적합한 교수 학습 방법을 수행하는 것	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결과 관련된 전반적인 활동을 인지하고 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기
	• 학습자 수준 및 태도 반영	학습자의 인지 수준 및 정의적 특성을 인지하고, 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통에 관해 인지하고, 이를 적절히 활용하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 평가 방법 및 절차 마련	수업 목표, 학습자 수준, 평가 목적 등에 따른 평가 방법 및 절차를 계획하고 마련하는 것	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기
	• 평가 도구 개발	학습 목표에 따른 평가 목표, 문항, 기준 선정 및 실행에 관하여 인지하고 이를 수행하는 것	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기
	• 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치를 위한 피드백 계획 및 실행을 교사가 인지하고 수행하는 것	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기
수업 상황	• 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료 등을 파악하고, 이를 준비하여 수업에 활용하는 것	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기
	• 교실 환경 및 수업 집단 조성	여러 도구 및 교구, 자료의 효율적인 활용성을 이해하고, 이에 맞춰 수업 환경 및 집단을 구성하는 것	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기
	• 학습 태도 및 수업 분위기 조성	교사가 해당 수업 내용에 관한 학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기를 인지하고, 이를 유도하는 것	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기
	• 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 또는 질문 등을 인지하고, 이를 효율적으로 대처하는 것	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기

나. 수업 평가 요소

수업 평가 영역에 따른 수업 평가 요소는 다음 〈표 Ⅶ-2〉와 같이 평정척도법을 이용하여 평정척도를 3단계 정도로 두는 것이 적당하며, 경우에 따라서는 5단계로 좀 더 세분화하여 사용하도록 한다.

수업 평가 요소를 수업 전(지식 보유 및 수업 계획), 수업 중(수업 실행), 수업 후(수업 반성)의 상황으로 세분화하여 제시하면 다음과 같다.

〈표 Ⅶ-2〉 수학 수업 평가 요소

수업 평가 영역		수업 평가 요소		평정척도		
				그렇다	보통이다	그렇지 못하다
교과 내용	1. 교육과정 이해 및 재구성	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 수학 내용	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 가치	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
학습자 이해	1. 학습자 수준	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 학습자 오개념	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 동기	적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 태도	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

교수 학습 방법 및 평가	1. 수업 목표 및 내용 반영	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습자 수준 및 태도 반영	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 평가 방법 및 절차 마련	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	6. 평가 도구 개발	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	7. 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
수업 상황	1. 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 교실 환경 및 수업 집단 조성	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 태도 및 수업 분위기 조성	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

따라서 이 수업 평가 틀은 교사가 자신의 수업 계획 및 진행, 그리고 반성을 통해 수업 개선은 물론, 더 나아가 교사 지식의 확장을 이끌 수 있도록 하는 데 도움을 줄 것이다. 이때 가급적 수업 후 즉각적으로 평가를 실시함으로써 자신의 수업 반성을 통하여 보다 수월하게 수업 개선이 이뤄질 수 있도록 한다. 또 학교 환경 및 수업 상황에 따라 동료 교사들과의 협력, 연구, 논의 등을 통하여 지속적으로 수업 개선을 도모하는 의지와 노력을 갖추도록 한다.

결론적으로 수업 평가 요소는 기본적으로 교사들이 어떤 지식을 보유하고, 그 지식을 토대로 수업을 계획하고 그 계획에 따라 수업을 실행하며, 더 나아가 반성 및 개선 여부에 활용되어야 한다. 만약 한 교사가 교과 내용, 학습자 이해, 교수 학습 방법 및 평가, 수업 상황 등에 관한 지식을 보유한다면, 수업 계획이나 수업 실행에서 교사의 보유된 지식이 고루 반영되어 드러나야 하며, 수업 반성의 측면도 마찬가지이다. 하지만 어떤 교사에 대해 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 부문을 동시에 판단하기는 무리이다. 일반적으로 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성의 네 부문 중에서 가장 진단하기에 용이하고 필요한 부문은 수업 실행 부문일 것이며, 또한 간편한 수업 평가를 위해서는 수업 실행 부문에 초점을 두어 교사 스스로 자기 평가를 수행하는 것이 좋다.

한마디로 교사가 자신이 수학 및 수학 교육 관련 지식을 어느 정도 보유하고 있는가에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 이 부문만을 스스로 점검하도록 한다. 마찬가지로 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 측면에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 해당 부문만을 선택하여 점검하도록 한다. 여기서 수업 계획과 수업 반성 측면의 평가 요소는 교사 자신의 교사 지식 및 전문성 향상을 위한 '자기 평가' 용으로 활용 가능하다. 한편 수업 실행 측면의 평가 요소는 교사 자신은 물론 동료 교사의 판단에 따라 진단 및 평가가 가능하다. 이때 평가 요소의 활용 단위(즉, 얼마만큼 수업을 진행한 후 평가를 할 것인가)는 교사의 수업 여건이나 상황에 따라 결정하도록 한다.

VIII. 교과서의 구성

01 편찬 방향

이 교과서는 새로 개정된 교육과정에 따라 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.

둘째, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 하여 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해하도록 하였다.

셋째, 자신의 생각을 표현하고 토론하며, 다양한 방법으로 수학적 내용을 다른 사람에게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 기를 수 있도록 하였다.

넷째, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

02 구성과 특징

■ 대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고, 사회 현상이나 자연 현상에서 관찰할 수 있거나 적용할 수 있는 이 단원의 수학 내용을 소개함으로써 단원 학습의 의미와 흥미를 불어넣어 주도록 하였다.

■ 준비 학습

각 대단원을 공부하는 데 꼭 필요한 선수 학습 요소와 이에 대한 문제를 제시함으로써 학습에 필요한 선행 지식을 상기하고 학습의 위계를 알 수 있도록 하였다.

■ 중단원 도입

실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

■ 생각 열기

새로운 내용의 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 소개하여 학생들에게 학습에 대한 흥미를 불러일으키고 내용 전개의 실마리를 제공하였다. 또한 이를 통하여 수학의 가치와 유용성도 느끼고 창의적인 생각을 키울 수 있도록 스토리텔링 형식을 빌렸다.

■ 탐구 활동

창의력 기르기와 관련된 물음이나 수학적 사고를 유발할 수 있는 물음과 활동을 통하여 새로 도입할 수학의 원리나 개념을 탐구할 수 있도록 하였다.

■ 예제

학습 내용과 관련된 대표적인 문제와 그 풀이 과정을 함께 제시함으로써 학생들의 개념 이해를 더욱 탄탄히 하고 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

■ 문제, 발전 문제, 실생활 문제

학습한 내용을 확인하는 기본 문제를 제시함으로써 학생들이 공부한 내용을 바르게 이해하였는지 스스로 점검할 수 있도록 하였다.

■ 창의 UP

생활 주변에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 원리와 법칙을 탐구하고, 수학의 개념을 깊이 생각해 보고 표현할 수 있게 하여 창의적인 생각을 기를 수 있도록 하였다.

■ 사고력 기르기(문제 해결, 추론, 의사소통)

여러 가지 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 기르기 위해 생활 주변의 문제 상황을 탐색하고 해결하는 문제를 제시하였다. 또 수학적 사실을 분석하고 정당화하는 문제를 통하여 수학적으로 사고하고 추론하는 능력을 향상시킬 수 있도록 하였다. 더불어 수학적 개념을 말로 표현하고 토론해 보게 함으로써 다른 사람과 효율적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 단원 과제

중단원 도입과 관련된 구체적 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.

■ 중단원 기초, 기본, 실력

중단원에서 학습한 내용에 대한 문제를 세 가지 수준으로 나누어 제시하였다. 기초에서는 중단원 학습 내용 중 최소 필수 내용을 확인하는 문제를 제공, 기본에서는 중단원 학습 내용 중 기본 개념을 확인하는 문제를 제공, 실력에서는 중단원 학습 내용을 완벽히 이해한 학생들의 수월성 교육에 이용하여 수준별 학습에 도움이 될 수 있도록 하였다.

■ 수행 과제

대단원에서 학습한 내용 중 탐구 소재를 선정하여 실험 또는 분석을 하거나 조사나 관찰을 하여 그 결과를 조직하고 표현함으로써 종합적인 문제 해결 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 대단원 학습 내용 정리

대단원 학습을 마친 후 이 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하고, 새로 배운 용어와 기호를 제시함으로써 학습 내용을 스스로 점검하고 보완할 수 있도록 하였다.

■ 대단원 평가 문제

대단원 학습을 종합적으로 평가하기 위하여 다양한 유형의 평가 문항들을 제시하였다. 또 마지막 두 문제는 서술형으로 제시하여 수학적 표현 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 공학적 도구(컴퓨터, 계산기)의 활용

단원의 내용 중에서 공학적 도구를 의미 있게 활용할 수 있는 학습 주제를 선정하여 인터넷, 컴퓨터, 계산기 등을 활용하는 방법을 제시함으로써 학습자의 흥미를 높이고, 효과적인 수업이 될 수 있도록 하였다.

■ 수학 플러스

단원의 끝에 이 단원의 수학 원리와 관련된 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 수학에 흥미를 불러일으키고, 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.

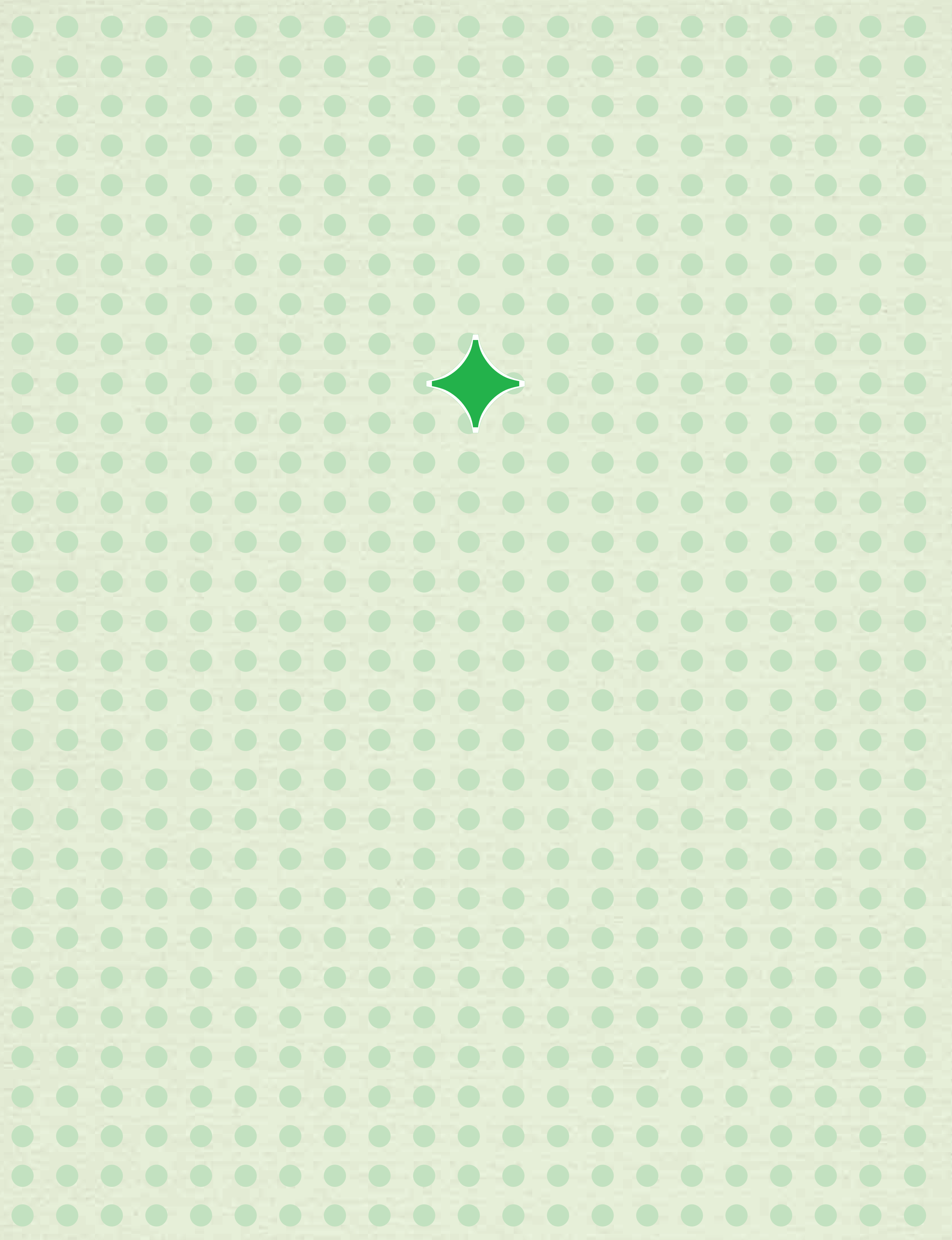
IX. 연간 지도 계획안

단원	중단원	차시	교과서 쪽수	지도 내용
Ⅰ. **평면 곡선**	1. 이차곡선	1～11	10～35	01 포물선 02 타원 03 쌍곡선 수준별 학습
	2. 평면 곡선의 접선	12～20	36～51	01 음함수의 미분 02 매개변수로 나타낸 함수의 미분 수준별 학습
	단원 마무리	21～22	52～59	
Ⅱ. **평면벡터**	1. 벡터의 연산	23～31	60～79	01 벡터의 뜻 02 벡터의 연산 수준별 학습
	2. 평면벡터의 성분과 내적	32～45	80～107	01 평면벡터의 성분 02 평면벡터의 내적 03 직선과 원의 방정식 수준별 학습
	3. 평면 운동	46～50	108～119	01 속도와 가속도 02 속도와 거리 수준별 학습
	단원 마무리	51～52	120～127	
Ⅲ. **공간도형과 공간벡터**	1. 공간도형	53～63	128～149	01 직선, 평면의 위치 관계 02 삼수선의 정리 03 정사영 수준별 학습
	2. 공간좌표	64～69	150～163	01 공간에서의 점의 좌표 02 선분의 내분점과 외분점 03 구의 방정식 수준별 학습
	3. 공간벡터	70～83	164～193	01 공간벡터의 뜻과 그 연산 02 공간벡터의 성분과 내적 03 직선의 방정식 04 평면과 구의 방정식 수준별 학습
	단원 마무리	84～85	194～199	

※ 위 계획안은 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도 등에 따라 적절히 조정하여 운영할 수 있다.

X. 참고 문헌

- 강완, 백석윤(1998). 초등수학 교육론. 동명사.
- 교육과학기술부(2007). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2007-79호 별책 8).
- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정 총론. 교육과학기술부 고시 제2009-41호.
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8).
- 신이섭 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.
- 이홍우(1999). 지식의 구조와 교과. 서울: 교육과학사.
- 임찬빈, 이화진, 곽영순, 강대현, 박영석(2004). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅰ): 일반 기준 및 교과(사회, 과학, 영어) 기준 개발. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2004-5.
- 임찬빈, 이화진, 최승현, 오은순, 이경언, 이수정, 노은희, 권순달(2006). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅲ): 일반 기준 및 교과(국어, 수학, 기술·가정, 음악, 초등) 기준 상세화. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2006-3.
- 조지민, 김명화, 최인봉, 송미영, 김수진(2007). 2006년 국가수준 학업성취도 평가 연구: 수학. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRE 2007-3-4.
- 박선화, 김명화, 주미경(2010). 수학에 대한 정의적 특성 향상 방안 연구. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRI 2010-9.
- 박순경(2010). 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정의 개선 방향 탐색. 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향 23-72. 국가교육과학기술자문위원회 교육과정위원회.
- 최승현(2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구–좋은 수업 사례에 대한 질적 접근–. 한국교육과정평가원.
- 최승현, 황혜정(2007). 수학 수업 평가 기준 개발에 관한 기초 연구, 학교 수학, 9(3), pp.327~352.
- 황혜정, 김홍원, 박경미, 김수환, 김신영, 채선희(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구. 한국교육개발원 연구 보고 CR 97-10-1.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 증보판). 문음사.
- 황혜정(2012). 수학 수업에서 요구되는 교사 지식에 대한 평가 기준 재탐색. 한국학교수학교육학회 시리즈 E 수학교육논문집, 26(1), pp.29~55.
- Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P.(1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Danielson Charlotte(1997). *A collection of Performance Tasks and Rubrics*: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye O Education, Inc..
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J. Mortimer, E. & Scott, P.(1994). *Constructing scientific knowledge in the classroom*. Educational Researcher, 23, (7), 5-12.
- Greeno, J. G.(1978). *Nature of Problem Solving Abilities*, In W. K. Estes(Ed.). *Handbook of learning and cognitive process: Human Information Processing*(pp.239~270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulick, S. & Rudnick, J. A.(1984). *A Sourcebook for Teaching Problem Solving*. Boston: Allyn and Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematics Assessment*, In J. K. Stenmark(Ed.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*, In Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M.(1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, In W. Blum et. al.(Eds.), *Application and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*(pp. 22~31). West Sussex: Ells Horwood Limited.
- Pólya, G.(1957), *How to Solve it*. 2nd ed., New York: Doubleday & Company, Inc..
- Vosniadou, S.(2001). *How children learn. Educational Practices series*. Monograph No. 7. International Bureau of Education(IBE).



차례

각론



원뿔에서 여러 가지 이차곡선을 찾아볼 수 있다.

평면 곡선

Ⅰ



준비학습

수학 Ⅰ 도형의 방정식

1 다음 도형의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 (1, 0), (2, 3)을 지나는 직선 $y=3x-3$

(2) 중심이 (1, 1)이고, 반지름의 길이가 2인 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

미적분 Ⅰ 함수의 미분

2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=2x^4-4x^2+1$ $y'=8x^3-8x$

(2) $y=(2x-1)^5$ $y'=10(2x-1)^4$

미적분 Ⅰ 접선의 방정식

3 다음 곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=3x^2-2x+1$, P(1, 2) $y=4x-2$

(2) $y=x^3$, P(−1, −1) $y=3x+2$

단원의 지도 목표

1. 이차곡선

① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

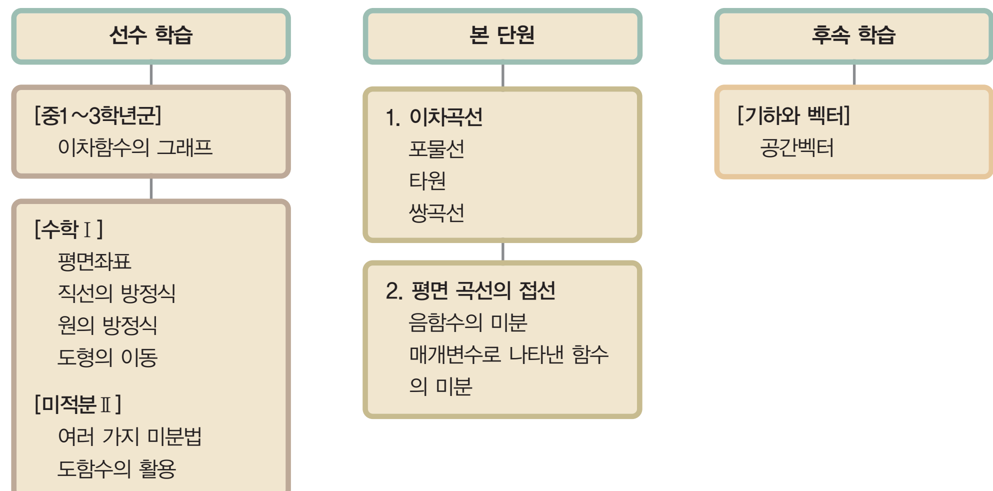
2. 평면 곡선의 접선

① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 이심률을 이용한 정의는 다루지 않는다.
② 이차곡선은 축이 x축, y축에 평행한 것만 다룬다.
③ 간단한 곡선을 음함수나 매개변수를 이용하여 나타내 봄으로써 음함수와 매개변수로 나타낸 함수는 곡선을 표현하는 방법 중 하나임을 이해하게 한다.
④ 음함수와 매개변수로 나타낸 함수는 간단한 것만 다룬다.

교수 · 학습의 계열

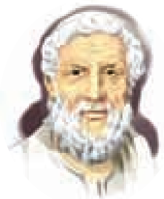


단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~4	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 이차곡선	중단원 도입		12	• 이차곡선	
	01 포물선		13~18	• 포물선의 방정식	포물선(축, 꼭짓점, 초점, 준선)
	02 타원	5~7	19~24	• 타원의 방정식	타원(초점, 꼭짓점, 중심, 장축, 단축)
	03 쌍곡선	8~10	25~32	• 쌍곡선의 방정식 • 이차곡선	쌍곡선(초점, 꼭짓점, 중심, 주축, 점근선) 이차곡선
	수준별 학습	11	33~35	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 평면 곡선의 접선	중단원 도입	12~16	36	• 사이클로이드(cycloid)	
	01 음함수의 미분		37~44	• 음함수의 미분법 • 이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식	음함수
	02 매개변수로 나타낸 함수의 미분	17~19	45~48	• 매개변수로 나타낸 함수의 도함수	매개변수
	수준별 학습	20	49~51	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		21~22	52~59	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 원뿔곡선

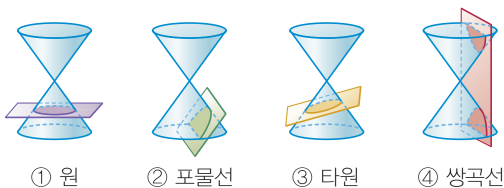


아폴로니오스

원뿔곡선은 원뿔을 하나의 평면으로 자를 때 잘려진 부분에 나타나는 곡선을 말하는데 원뿔곡선에 관한 이론은 그리스 수학자 메나이크모스(Menaechmos ; ?B.C. 375~?B.C. 320), 아폴로니오스(Apollonios ; ?B.C. 262~?B.C. 190), 그리고 다른 학자들에 의해 발달하기 시작하였다. 메나이크모스는 꼭지각이 직각인 직원뿔을 한 모선과 예각, 둔각, 직각을 이루는 평면으로 잘라서 각각 타원, 쌍곡선, 포물선을 얻었다.

그 후 아폴로니오스는 원뿔곡선에 대한 지식을 정리하고 자신의 연구를 더하여 “원뿔곡선론”이란 책을 펴냈다. 그는 메나이크모스의 방법을 더욱 발전시켜 꼭지각이 일정한 하나의 원뿔을 기울기가 다른 평면으로 잘랐을 때의 단면으로 원뿔곡선을 파악하였다. 즉, 한 개의 원뿔을 자르는 데 있어서, 자르는 평면의 기울기를 점점 크게 변화시켜 갈 때 나타나는 단면이 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이라는 것이다.

아래 그림과 같이 두 직원뿔을 절단하는 평면의 꼭짓점을 지나지 않도록 하면서 각 원뿔곡선은 다음과 같은 방법으로 만들어진다.



① 원 ② 포물선 ③ 타원 ④ 쌍곡선

① 원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자르면 단면은 원이다.

② 원뿔을 모선에 평행한 평면으로 자르면 단면은 포물선이다.

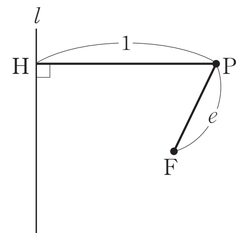
③ 밑면이나 모선에 평행하지 않으면서 한쪽의 원뿔만 잘라지도록 자르면 단면은 타원이다.

④ 양쪽의 원뿔이 모두 잘라지도록 자르면 단면은 쌍곡선이다.

2. 이심률과 원뿔곡선

평면 위의 한 정점과 정직선에 이르는 거리의 비가 일정한 점의 자취를 원뿔곡선이라고 한다.

정점을 F, 정직선을 l이라 하고, 그 평면 위의 한 점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때,



$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=e \text{ (양의 상수)}$$

를 만족시키는 점 P의 자취가 원뿔곡선이다. 이때 타원, 포물선, 쌍곡선을 다음과 같이 정의할 수 있다.

① $0<e<1$이면 타원

② $e=1$이면 포물선

③ $e>1$이면 쌍곡선

여기서 정점 F, 정직선 l을 각각 원뿔곡선의 초점(focus), 준선(directrix)이라 하고, 양의 상수 e를 원뿔곡선의 이심률(eccentricity)이라고 한다.

3. 이차곡선

해석 기하학의 아이디어를 이용하면 직선이나 곡선과 같은 도형을 대수적인 방정식으로 나타낼 수 있다. 가장 간단한 도형이라 할 수 있는 평면 위의 직선은 $ax+by+c=0$과 같이 x, y에 대한 일차방정식으로 나타낼 수 있다. 역으로 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$은 평면 위의 직선을 나타낸다.

같은 방법으로 원뿔곡선은 x, y에 대한 이차방정식

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$으로 나타낼 수 있다. 이 때문에 원뿔곡선은 이차곡선이라고도 한다. 원뿔곡선과 이차곡선은 동일한 대상을 지칭하지만, 원뿔곡선은 원뿔을 어떻게 절단하느냐에 따라 결정되는 기하적인 명칭인 반면, 이차곡선은 이차방정식으로 표현된다는 사실에 주목한 대수적인 명칭이다.

한편 이차곡선 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$은 계수의 관계를 이용하여 곡선을 분류할 수 있다.

$$A=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

라고 하면 행렬식 $\det(A)=ac-\frac{b^2}{4}=-\frac{1}{4}(b^2-4ac)$

이고, 이는 A의 고유다항식 $P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)$의 상수항과 같다.

A의 고유치, 즉 $P(\lambda)=0$의 해를 λ_1, λ_2라고 할 때,

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2$$

이므로 $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{4}(b^2-4ac)$가 된다.

여기서 b^2-4ac를 위의 이차방정식의 판별식이라고 한다.

(1) $b^2-4ac>0$이면 $\lambda_1\lambda_2<0$이므로 λ_1, λ_2는 서로 다른 부호를 가진다. 이때 위의 방정식의 그래프를 쌍곡선이라고 한다.

(2) $b^2-4ac<0$이면 $\lambda_1\lambda_2>0$이므로 λ_1, λ_2는 같은 부호를 가진다. 이때 위의 방정식의 그래프를 타원이라고 한다.

(3) $b^2-4ac=0$이면 $\lambda_1\lambda_2=0$이고 λ_1, λ_2 중 하나는 0이다. 이때 위의 방정식의 그래프는 포물선이다.

즉, 이차방정식을 변형하면 판별식의 값에 따라

(1)의 경우는 $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$ 또는 0

(2)의 경우는 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$, -1 또는 0

(3)의 경우는 $x'^2=4py'\,(p>0)$, a^2, $-d$ 또는 0

으로 나타내어짐을 의미한다.

4. 실생활 속 이차곡선의 활용

이차곡선은 여러 가지 자연 현상에서 관찰되고 우리 생활에서도 유용하게 사용되고 있다. 이러한 이유에서 일찍이 이차곡선인 포물선과 쌍곡선은 타원과 더불어 고대에서 현재까지 많은 학자들에 의해 연구되고 있다.

갈릴레이는 던져진 물체의 궤적을 포물선으로 설명했고, 행성 운동의 세 가지 법칙을 발견한 케플러는 타원으로 행성궤도를 설명하기도 하였다.

현대에도 이차곡선은 생활에 유용하게 이용되고 있다. 예를 들면, 위성 안테나는 포물선을 회전시켜 얻은 포물면 모양을 하고 있는데 포물선의 축과 평행하게 들어오는 전파는 모두 포물선의 초점에 모이게 된다는 성질을 이용하고 있다. 즉, 축과 평행인 직선이 포물선과 만나는 점의 입사각과 반사각이 서로 같도록 반사되면 포물선의 초점을 지나게 된다. 이를 이용하여 약한 전파라도 한 곳에 모으기 위해 위성 안테나는 포물면의 모양으로 만들어져 있다. 또 반사면이 포물면으로 되어 있는 포물면 거울은 빛을 초점에 모이게 하여 태양열 발전소 등에서 태양열을 효과적으로 모으는 데 사용되기도 하는데 프랑스의 오델로 태양열 발전소가 그 예이다.

앞의 두 가지 경우와 반대로 포물면 거울의 초점에 광원을 놓으면 불빛은 반사되어 축과 평행한 방향으로 직진을 하는데 이러한 원리는 먼 곳에 있는 물체를 비추기 위한 조명 기구에 이용된다. 탐조등이나 손전등, 자동차의 전조등 등이 이러한 원리를 활용한 것이다.

한편, 신장결석을 치료하는 의료 기기는 결석을 타원의 한 초점에 위치하게 하고 다른 한 초점에 충격파를 발생시키면 타원의 성질에 의하여 충격파들이 결석의 위치에 모이게 되어 사람의 몸에는 큰 손상 없이 결석에만 충격을 주어 결석을 제거할 수 있다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅰ. 평면 곡선</td><td>쪽수</td><td>교과서 10~14쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 이차곡선　01 포물선</td><td>차시</td><td>1/22</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">포물선의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인
동기 유발
학습 목표 제시</td><td colspan="2">⊙ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다.
⊙ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다.
⊙ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 포물선의 뜻을 안다.</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td>탐구 활동
개념 학습</td><td colspan="2">⊙ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다.
⊙ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.
⊙ 학습 내용 설명
포물선
(1) 포물선: 평면 위의 한 점 F(초점)와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l(준선)이 있을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합
(2) 포물선의 축: 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선
(3) 포물선의 꼭짓점: 축과 포물선의 교점</td><td></td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">⊙ 본시의 학습 내용을 정리한다.
⊙ 다음 차시를 예고한다.
• 초점이 x축 위에 있고 준선이 y축에 평행한 포물선의 방정식에 대하여 알아본다.</td><td></td></tr>
</table>

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅰ. 평면 곡선	쪽수	교과서 14~16쪽
소단원	1. 이차곡선　01 포물선	차시	2/22
학습 목표	**초점이 x축 위에 있고 준선이 y축에 평행한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.**		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전 차시에서 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 포물선의 뜻을 말하여 보자. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 초점이 x축 위에 있고 준선이 y축에 평행한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	
전개	개념 학습 문제 해결	◎ 학습 내용 설명 **포물선의 방정식 [1]** 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq0$) 예 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고 준선이 $x=-2$인 포물선의 방정식 ⇨ $y^2=8x$ ◎ 예제 01을 설명한다. ◎ 문제 1, 2, 3번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◎ 창의 UP 문제를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 초점이 y축 위에 있고 준선이 x축에 평행한 포물선의 방정식에 대하여 알아본다.	

1 이차곡선

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 포물선	포물선의 방정식
02 타원	타원의 방정식
03 쌍곡선	쌍곡선의 방정식
	이차곡선
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 12 쪽

1 이차곡선

초양대교

이차곡선



빨랫줄이나 두 전봇대 사이에 걸쳐 있는 전깃줄과 같이 재질이 균일한 줄을 양 끝에 고정한 채 늘어뜨리면 줄은 아래로 처지며 대칭인 곡선을 이룬다. 이 곡선은 포물선의 모양과 유사한데 이를 현수선이라고 한다.

현수선은 예술이나 건축에도 자주 이용되는데 아치 모양의 구조물이 가장 안정한 상태를 유지하기 위해서는 현수선을 거꾸로 뒤집은 모양이 되어야 한다고 한다.

한편 현수선에 일정한 간격으로 같은 크기의 힘으로 아래 방향으로 당기면 현수선을 그리던 곡선은 이차함수의 그래프, 즉 포물선으로 변한다.

인천 국제공항 고속국도의 영종대교와 같이 우리가 흔히 현수교라고 부르는 다리의 케이블이 나타내는 곡선, 초양대교의 아치형 구조물 등이 나타내는 곡선은 실제로 포물선에 가깝다.

이와 같은 포물선은 이차방정식으로 나타낼 수 있다.



영종대교

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 32쪽

이차방정식으로 나타낼 수 있는 곡선에는 어떤 것들이 있을까?

들어가면서 이차곡선은 태양계의 행성이나 혜성의 궤도를 밝히는 데 중요한 역할을 하며, 천체를 관측하는 망원경을 제작할 때에도 그 성질이 활용된다.

또 이차곡선은 운동 물체의 궤도를 연구하는 운동 역학 분야, 다리나 터널을 설계하는 토목 공학 분야, 소리의 효과를 연구하는 음향학 분야 등에도 많이 활용된다.

이 단원에서는 이차곡선인 포물선, 타원, 쌍곡선의 뜻을 알고 이를 바탕으로 각각의 방정식을 구하여 이차곡선을 자유롭게 사용하고 활용할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	상	포물선의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표축 위에 초점이 있고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식, 초점과 꼭짓점의 좌표, 준선과 축의 방정식을 구할 수 있다.
	하	포물선의 뜻과 초점, 꼭짓점, 준선, 축의 뜻을 말할 수 있다.
2. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.	상	타원의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표축 위에 초점이 있고 중심이 원점인 타원의 방정식, 초점과 꼭짓점의 좌표, 장축과 단축의 길이를 구할 수 있다.
	하	타원의 뜻과 초점, 꼭짓점, 장축, 단축의 뜻을 말할 수 있다.
3. 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.	상	쌍곡선의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표축 위에 초점이 있고 중심이 원점인 쌍곡선의 방정식, 초점의 좌표, 주축의 길이, 점근선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	쌍곡선의 뜻과 초점, 주축, 점근선의 뜻을 말할 수 있다.

교과서 13 쪽

01 포물선

● 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

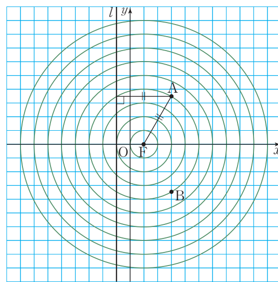
포물선의 방정식은 어떻게 구하는가?

생각 열기 위성 안테나



'파라볼라 안테나' 라고도 하는 움푹한 접시 모양의 위성 안테나는 포물선을 안테나의 축을 중심으로 회전시킨 모양으로 되어 있다. 전파가 위성 안테나의 축에 평행하게 들어온다면 모두 특정한 지점에 모이게 되므로 인공위성에서 날아온 전파가 약하더라도 효율적으로 모을 수 있다. 태양열 발전소 역시 위성 안테나 모양의 거울을 이용하여 태양열을 모아 전기를 만든다.

탐구 활동 위성 안테나의 단면은 동심원을 이용하여 그릴 수 있다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 각각 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$인 원과 반지름의 길이가 2인 원에 접하고 x축에 수직인 직선 l이 있다. 물음에 답하여 보자.

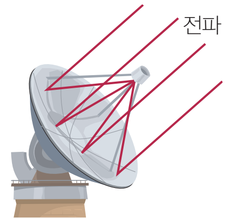


1. 점 A에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리는 4로 서로 같다. 점 B에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리를 각각 구하여 보자.
2. 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$로 서로 같은 점들을 찾아 그림에 표시하여 보자.
3. 2에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

새로 나온 용어와 기호

- 포물선(抛物線, parabola)
- 포물선의 축(抛物線 — 軸, axis of parabola)
- 포물선의 꼭짓점(vertex of parabola)
- 포물선의 초점(抛物線 — 焦點, focal point of parabola)
- 포물선의 준선(抛物線 — 準線, directrix of parabola)

생각 열기 참/고/자/료



위성 안테나의 면은 포물선을 그 축을 중심으로 회전시켜 만든 모양인 포물면으로 되어 있다. 인공위성에서 발사된 전파는 평행하게 진행하여 위성 안테나에서 반사된 후 초점을 지나게 된다. 따라서 이 초점의 위치에 수신기를 설치하면 미약한 전파도 잘 탐지할 수 있게 된다.

이와 같은 원리는 프랑스의 오델로 태양열 발전소에서 이용되는데 평평한 유리를 경사지게 설치하여 이 반사경에 반사된 태양빛을 초점의 위치에 있는 태양로로 보내어 3000°C가 넘는 열을 발생시킨다.

01 포물선

소단원 지도 목표

① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 포물선의 방정식에서 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.
③ 포물선의 평행이동을 이해하게 한다.

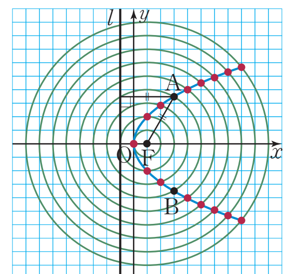
교수 · 학습상의 유의점

1. 포물선은 평면도형이므로 포물선 위의 점은 평면 위의 점임을 유의시킨다.
2. 포물선에 관련된 용어를 정의할 때, 구체적인 예를 보이면서 정의한다.
3. 준선이 x축 또는 y축에 평행한 포물선만 다룬다.
4. 그래프는 초점과 준선을 이용하여 그 개형을 그리게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 점 F와 직선 l로부터 같은 거리에 있는 위치를 점으로 나타내 보고, 이 점들을 연결할 때 어떤 모양의 도형을 이루는지 관찰하게 하여 포물선의 뜻과 성질을 이해하게 하려는 것이다.

1. 점 B에서 점 F에 이르는 거리는 4이고, 점 B에서 직선 l에 이르는 거리도 4이다.
2. 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$로 서로 같은 점은 오른쪽 그림의 빨간색 점이다.
3. 오른쪽 그림의 파란색 선과 같다.

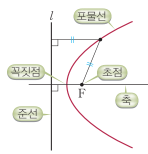


교과서 14 쪽

❶ 탐구 활동에서와 같이 평면 위의 한 점 F와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다.

이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라고 한다.

또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 축과 포물선의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.



● 포물선은 영어로 파라볼라(parabola)라고 한다.

0이 아닌 실수 p에 대하여 x축 위의 한 점 $F(p, 0)$을 초점으로 하고, 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하여 보자.

포물선 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH}$$

이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$y^2=4px \quad \cdots\cdots ①$$

역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $P(x, y)$와 점 $F(p, 0)$ 사이의 거리 $\overline{PF}$는

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\sqrt{(x-p)^2+4px}=\sqrt{(x+p)^2}=|x+p|$$

이고, 점 $P(x, y)$에서 직선 $x=-p$에 내린 수선의 발 H 사이의 거리 $\overline{PH}$는

$$\overline{PH}=|x-(-p)|=|x+p|$$

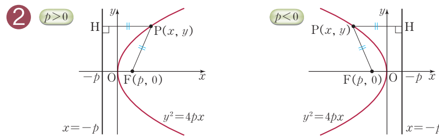
이므로 $\overline{PF}=\overline{PH}$가 성립한다. 즉, 방정식 ①을 만족시키는 점 P는 초점이 $F(p, 0)$이고, 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점이 된다.

따라서 방정식 ①은 구하는 포물선의 방정식이다.

수학 I 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

● 점 $P(x, y)$와 직선 $x=k$ 사이의 거리는 $|x-k|$이다.

❷



● 포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $y=0$이다.

교과서 15 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **포물선의 방정식 [1]**
> 초점이 $F(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은
> $$y^2=4px \text{ (단, } p\neq 0)$$

● 포물선 $y^2=4px$는 x축에 대하여 대칭이다.

보기 초점이 $F(2, 0)$이고 준선이 $x=-2$인 포물선의 방정식은
$y^2=4px$에서 $p=2$이므로 $y^2=8x$

문제 1 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 $F(3, 0)$이고 준선이 $x=-3$인 포물선

(2) 초점이 $F(-1, 0)$이고 준선이 $x=1$인 포물선

예제 01 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

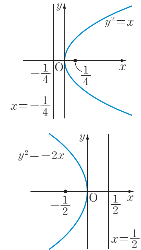
(1) $y^2=x$ (2) $y^2=-2x$

풀이 (1) $y^2=x$에서 $y^2=4\times\frac{1}{4}\times x$이므로 $p=\frac{1}{4}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(2) $y^2=-2x$에서 $y^2=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times x$이므로 $p=-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 (1) 초점의 좌표: $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, 준선의 방정식: $x=-\frac{1}{4}$

(2) 초점의 좌표: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 준선의 방정식: $x=\frac{1}{2}$

문제 2 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

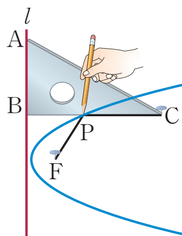
(1) $y^2=4x$ (2) $y^2=-8x$

본문 해설

❶ 탐구 활동에서 제시된 방법 외에 직접 작도하여 포물선의 정의를 이해하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 삼각자 ABC의 직각을 끼는 한 변 AB를 직선 l에 댄다.

변 BC의 길이와 같은 길이의 실로 한 끝은 초점 F에, 다른 끝은 삼각자의 꼭짓점 C에 고정시킨다. 연필 끝으로 실을 팽팽히 당겨 연필 끝이 삼각자의 변 BC 위에 있도록 하면서 삼각자를 직선 l을 따라 움직여가면 연필의 끝점 P는 하나의 포물선을 그린다.



이때 선분 BC의 길이와 실의 길이가 같으므로

$\overline{BC}=\overline{PF}+\overline{PC}$, $\overline{BC}-\overline{PC}=\overline{PF}$

따라서 $\overline{PB}=\overline{PF}$

점 P에서 직선 l까지의 거리 $\overline{PB}$와 점 F까지의 거리 $\overline{PF}$가 같으므로 점 P가 그리는 도형은 직선 l과 점 F에 이르는 거리가 같은 점들의 집합이다. 이 도형을 포물선이라고 한다.

❷ 포물선 $y^2=4px$는 초점이 x축 위에 있고, 준선이 y축에 평행하며 꼭짓점은 원점이고, 축은 x축$(y=0)$이다.

이때 $p>0$이면 왼쪽으로, $p<0$이면 오른쪽으로 볼록한 포물선이다.

1

목표| 초점이 x축 위에 있고 준선이 y축에 평행한 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y^2=4px$에서 $p=3$이므로

$\boldsymbol{y^2=12x}$

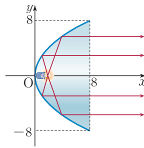
(2) $y^2=4px$에서 $p=-1$이므로

$\boldsymbol{y^2=-4x}$

교과서 16 쪽

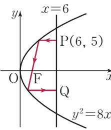
실생활

문제 3 손전등 반사경의 단면은 포물선 모양으로 되어 있다. 오른쪽 그림은 어느 손전등 반사경의 단면을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 전구의 위치가 포물선의 초점이라고 할 때, 초점의 좌표를 구하여라.

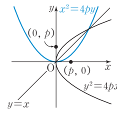


창의 up

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=6$ 위의 점 $\mathrm{P}(6,\ 5)$에서 x축에 평행하게 출발한 빛이 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 향해 반사되고, 초점을 지나서 다시 포물선과 만나 x축에 평행하게 반사되어 직선 $x=6$ 위의 점 Q까지 도달하였다. 이때 빛이 진행한 거리를 구하는 방법을 설명하여라.



● $x^2=4py$의 그래프는 $y^2=4px$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와도 같다.



● 포물선 $x^2=4py$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $x=0$이다.

● 포물선 $x^2=4py$는 y축에 대하여 대칭이다.

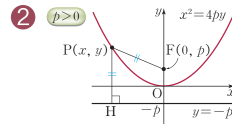
초점이 y축 위에 있고 준선이 x축에 평행한 포물선의 방정식에 대하여 알아보자.

❶ 방정식 $y^2=4px$를 구할 때와 같은 방법으로 0이 아닌 실수 p에 대하여 y축 위의 점 $\mathrm{F}(0,\ p)$를 초점으로 하고, 직선 $y=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식은

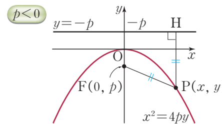
$$x^2=4py$$

임을 알 수 있다.

❷ $p>0$



$p<0$



이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선의 방정식 [2]

초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$x^2=4py$ (단, $p\neq0$)

보기 초점이 $\mathrm{F}(0,\ -2)$이고 준선이 $y=2$인 포물선의 방정식은
$x^2=4py$에서 $p=-2$이므로 $x^2=-8y$

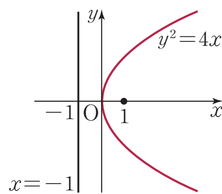
2

목표| $y^2=4px$ 꼴의 포물선에서 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $y^2=4x$에서 $y^2=4\times1\times x$이므로 $p=1$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 **(1, 0)**이고, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{x=-1}$이다.

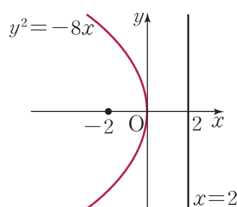
또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y^2=-8x$에서 $y^2=4\times(-2)\times x$이므로 $p=-2$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 **(−2, 0)**이고, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{x=2}$이다.

또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



3

목표| 포물선의 방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 꼭짓점 O를 원점으로 하는 포물선의 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(p,\ 0)$으로 놓으면 포물선의 방정식은 $y^2=4px$이다.

포물선이 점 $(8,\ 8)$을 지나므로

$8^2=4p\times8$에서 $p=2$

따라서 초점의 좌표는 **(2, 0)**이다.

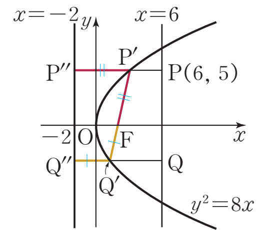
창의 UP

출제 의도| 포물선의 정의를 이용하여 물리 현상에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{\mathrm{P'P''}}=\overline{\mathrm{P'F}}$, $\overline{\mathrm{Q'Q''}}=\overline{\mathrm{Q'F}}$이므로

$\overline{\mathrm{PP'}}+\overline{\mathrm{P'F}}=8$,

$\overline{\mathrm{QQ'}}+\overline{\mathrm{Q'F}}=8$



따라서 빛이 진행한 거리는

$\overline{\mathrm{PP'}}+\overline{\mathrm{P'F}}+\overline{\mathrm{FQ'}}+\overline{\mathrm{Q'Q}}$이므로

$8+8=\mathbf{16}$

본문 해설

❶ 0이 아닌 실수 p에 대하여 y축 위의 한 점 $\mathrm{F}(0,\ p)$를 초점으로 하고, 직선 $y=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하여 보자.

포물선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선 $y=-p$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x,\ -p)$라고 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2=4py$

❷ 포물선 $x^2=4py$는 초점이 y축 위에 있고, 준선이 x축에 평행하며 꼭짓점은 원점이고, 축은 y축$(x=0)$이다.

이때 $p>0$이면 아래로, $p<0$이면 위로 볼록한 포물선이다.

4

목표| 초점이 y축 위에 있고 준선이 x축에 평행한 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2=4py$에서 $p=1$이므로

$\boldsymbol{x^2=4y}$

(2) $x^2=4py$에서 $p=-3$이므로

$\boldsymbol{x^2=-12y}$

5

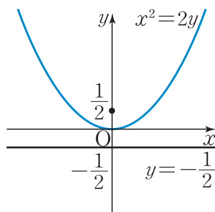
목표| $x^2=4py$ 꼴의 포물선에서 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2=2y$에서

$x^2=4\times\frac{1}{2}\times y$이므로 $p=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\boldsymbol{\left(0,\ \frac{1}{2}\right)}$이고, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}}$이다.

또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

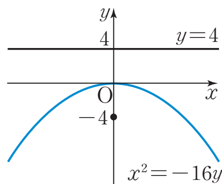


(2) $x^2=-16y$에서

$x^2=4\times(-4)\times y$이므로 $p=-4$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\boldsymbol{(0,\ -4)}$이고, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{y=4}$이다.

또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 포물선 $x^2=4py$에서 초점과 꼭짓점 사이의 거리에 따른 포물선의 모양을 이해하게 한다.

풀이| 포물선 $x^2=4py$에서 초점이 꼭짓점에서 멀어질수록 곡선의 폭이 넓어지고, 초점이 꼭짓점에 가까워질수록 곡선의 폭이 좁아진다.

교과서 17 쪽

문제 4 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 F(0, 1)이고 준선이 $y=-1$인 포물선

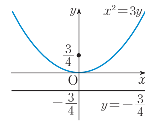
(2) 초점이 F(0, -3)이고 준선이 $y=3$인 포물선

예제 02 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $x^2=3y$ (2) $x^2=-4y$

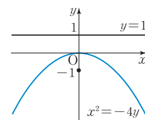
풀이 (1) $x^2=3y$에서 $x^2=4\times\frac{3}{4}\times y$이므로 $p=\frac{3}{4}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$이고 준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $x^2=-4y$에서 $x^2=4\times(-1)\times y$이므로 $p=-1$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 (0, -1)이고 준선의 방정식은 $y=1$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 (1) 초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$, 준선의 방정식: $y=-\frac{3}{4}$

(2) 초점의 좌표: (0, -1), 준선의 방정식: $y=1$

문제 5 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $x^2=2y$ (2) $x^2=-16y$

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

포물선 $x^2=4py$에서 초점이 꼭짓점으로부터 멀어지거나 가까워짐에 따라 곡선의 모양은 어떻게 변하는지 토의하여 보자.

6

목표| 평행이동한 포물선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 준선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 포물선 $(y-1)^2=8(x-3)$은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 (2, 0), 꼭짓점의 좌표는 (0, 0), 준선의 방정식은 $x=-2$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\boldsymbol{(5,\ 1)}$, 꼭짓점의 좌표는 $\boldsymbol{(3,\ 1)}$, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{x=1}$이다.

(2) 포물선 $(x+1)^2=-4(y+2)$는 포물선 $x^2=-4y$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $x^2=-4y$의 초점의 좌표는 (0, -1), 꼭짓점의 좌표는 (0, 0), 준선의 방정식은 $y=1$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\boldsymbol{(-1,\ -3)}$, 꼭짓점의 좌표는 $\boldsymbol{(-1,\ -2)}$, 준선의 방정식은 $\boldsymbol{y=-1}$이다.

포물선의 평행이동에 대하여 알아보자.

꼭짓점이 원점이고, x축을 축으로 하는 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 포물선

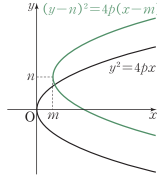
$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이 된다.

이때 꼭짓점의 좌표는 (m, n), 초점의 좌표는 $(p+m, n)$이고, 준선의 방정식은 $x=-p+m$이다.

이와 마찬가지로 포물선 $(x-m)^2=4p(y-n)$의 꼭짓점의 좌표는 (m, n), 초점의 좌표는 $(m, p+n)$이고, 준선의 방정식은 $y=-p+n$이다.

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-m, y-n)=0$



문제 6 다음 포물선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 준선의 방정식을 구하여라.

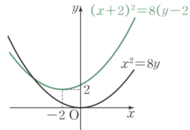
(1) $(y-1)^2=8(x-3)$　　(2) $(x+1)^2=-4(y+2)$

예제 03 방정식 $x^2+4x-8y+20=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 방정식 $x^2+4x-8y+20=0$을 변형하면

$$(x+2)^2=8(y-2)$$

이는 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 7 다음 방정식이 나타내는 도형을 그려라.

(1) $y^2+4x-4y+8=0$　　(2) $x^2-2x-2y+3=0$

발전 **문제 8** 초점이 F(2, 1)이고 준선이 $y=3$인 포물선의 방정식을 구하여라.

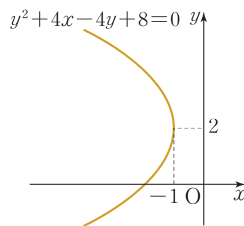
7

목표| 주어진 방정식을 변형하여 방정식이 나타내는 도형을 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) 방정식 $y^2+4x-4y+8=0$을 변형하면

$(y-2)^2=-4(x+1)$

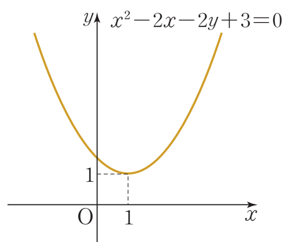
이는 포물선 $y^2=-4x$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 방정식 $x^2-2x-2y+3=0$을 변형하면

$(x-1)^2=2(y-1)$

이는 포물선 $x^2=2y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



8

목표| 평행이동한 포물선의 초점과 준선이 주어졌을 때 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 초점이 F(2, 1)이고 준선이 $y=3$인 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (2, 2)이다. 이때 꼭짓점에서 준선 $y=3$에 이르는 거리가 1이므로 이 포물선은 $x^2=-4y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$(x-2)^2=-4(y-2)$ 즉,

$\mathbf{x^2-4x+4y-4=0}$

다른 풀이| 포물선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|y-3|$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-4x+4y-4=0$

지/도/자/료

y축에 평행한 축을 가진 포물선의 방정식

$(y-n)^2=4p(x-m)$

을 전개하면

$y^2-4px-2ny+n^2+4pm=0$

$-4p=A$, $-2n=B$, $n^2+4pm=C$라고 하면

$y^2+Ax+By+C=0$ (단, $A\neq0$)

꼴이 된다.

또 x축에 평행한 축을 가진 포물선의 방정식

$(x-m)^2=4p(y-n)$

을 위와 같은 방법으로 전개하고 적당히 치환하면

$x^2+Ax+By+C=0$ (단, $B\neq0$)

꼴이 된다.

이와 같이 포물선의 방정식의 공통적인 특징은 x, y 중 어느 한 문자에 대한 이차식이며 xy항이 없다.

02 타원

소단원 지도 목표

① 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 타원의 방정식에서 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.
③ 타원의 평행이동을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 타원은 평면도형이므로 타원 위의 점은 평면 위의 점임을 유의시킨다.

2. 타원에 관련된 용어를 정의할 때, 구체적인 예를 보이면서 정의한다.

3. 타원의 두 초점이 x축 또는 y축에 평행한 직선 위에 있는 것만 다룬다.

4. 그래프는 꼭짓점을 이용하여 그 개형을 그리게 한다.

교과서 19 쪽

02 타원

● 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

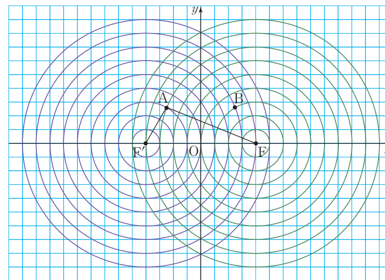
타원의 방정식은 어떻게 구하는가?

생각 열기 세인트 폴 대성당

영국 런던에 있는 세인트 폴 대성당의 '속삭이는 회랑'은 특정한 곳에서 작은 소리로 속삭이면 그 소리가 멀리 떨어진 다른 특정한 곳에서 또렷하게 들리는 신기한 장소이다. 이 현상은 속삭이는 회랑의 어느 특정한 곳에서 이야기하면 그 소리가 천장에 반사된 후 또 다른 특정한 곳으로 모이기 때문에 발생한다.



탐구 활동 속삭이는 회랑의 천장의 단면은 원을 이용하여 그릴 수 있다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 각각 점 $F(4, 0)$, 점 $F'(-4, 0)$이고, 반지름의 길이가 각각 $1, 2, 3, \cdots, 9$인 원이 있다. 물음에 답하여 보자.



1. 점 A는 두 점 F, F'으로부터의 거리의 합이 10인 점이다. 점 B에서 두 점 F, F'에 이르는 거리의 합을 구하여 보자.

2. 두 점 F, F'으로부터의 거리의 합이 10인 점들을 찾아 그림에 표시하여 보자.

3. **2**에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

새로 나온 용어와 기호

- 타원(楕圓, ellipse)
- 타원의 초점(楕圓—焦點, focal point axis of ellipse)
- 타원의 꼭짓점(vertex of ellipse)
- 타원의 중심(楕圓—中心, center axis of ellipse)
- 타원의 장축(楕圓—長軸, major axis of ellipse)
- 타원의 단축(楕圓—短軸, minor axis of ellipse)

생각 열기 참 / 고 / 자 / 료

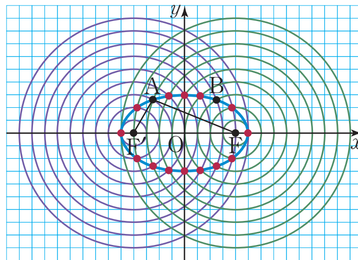
영국 런던에 있는 세인트 폴 대성당은 '속삭이는 회랑(whispering gallery)'이라는 신비한 장소로 유명하다. 돔 아래의 회랑의 어느 특정한 곳에서 소리를 내면 사방으로 퍼지지만 타원형 천장에 도달하면 반사된 소리가 모두 건너편 회랑의 또 다른 특정한 곳으로 다시 모이게 된다. 이 때문에 회랑의 한 쪽에서 작은 소리로 속삭이면 그 소리가 건너편 회랑에서 또렷하게 들린다.
이 현상의 비밀은 타원형 천장에 있다. 모든 타원은 두 개의 초점을 갖는데 위 현상이 생기는 특정한 장소는 바로 두 초점에 해당하는 곳이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 점 F, F'으로부터의 거리의 합이 10인 점을 나타내 보고, 이 점들을 연결할 때 어떤 모양의 도형을 이루는지 관찰하게 하여 타원의 뜻과 성질을 이해하게 하려는 것이다.

1. 점 B에서 두 점 F, F'에 이르는 거리의 합은 **10**이다.

2.



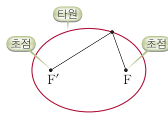
두 점 F, F'으로부터의 거리의 합이 10인 점은 위의 그림에서 빨간색 점이다.

3. 위의 그림의 파란색 선과 같다.

교과서 20 쪽

타원은 영어로 엘립스(ellipse)라고 한다.

❶ 탐구 활동에서와 같이 평면 위의 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 **타원**이라고 하며, 두 점 F, F′을 타원의 **초점**이라고 한다.



먼저 x축 위의 두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$을 초점으로 하고, 두 초점 F, F′으로부터의 거리의 합이 $2a(a>c>0)$인 타원의 방정식을 구하여 보자.

타원 위의 임의의 점을 P(x, y)라고 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$$

이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

이다. 여기서 $a>c>0$이므로 $b^2=a^2-c^2$ $(b>0)$으로 놓으면

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

이다. 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 P(x, y)와 두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ 사이의 거리를 각각 구하여서 더하여 보면 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$가 성립한다. 즉, 점 P는 두 초점이 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$인 타원 위의 점이 된다.

따라서 방정식 ①은 구하는 타원의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이다.

❷ **타원의 방정식 [1]**

두 초점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b^2=a^2-c^2)$$

보기 두 초점 F$(4, 0)$, F′$(-4, 0)$으로부터의 거리의 합이 10인 타원의 방정식은 $2a=10$에서 $a=5$이고, $c=4$에서 $b^2=a^2-c^2=25-16=9$이므로 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

교과서 21 쪽

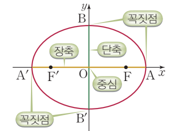
문제 1 다음 타원의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점 F$(2, 0)$, F′$(-2, 0)$으로부터의 거리의 합이 6인 타원

(2) 두 초점 F$(3, 0)$, F′$(-3, 0)$으로부터의 거리의 합이 10인 타원

오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a, 0),\ \mathrm{A'}(-a, 0),$$
$$\mathrm{B}(0, b),\ \mathrm{B'}(0, -b)$$



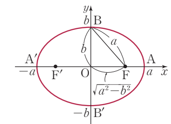
이다. 이때 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 **꼭짓점**, $\overline{\mathrm{AA'}}$을 타원의 **장축**, $\overline{\mathrm{BB'}}$을 타원의 **단축**이라고 하며, 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**이라고 한다.

타원은 장축과 단축 및 중심에 대하여 대칭이고, 두 초점은 장축 위에 있다.

또 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA'}}=2a$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB'}}=2b$이다.

❸ 한편 $c^2=a^2-b^2$이므로 타원의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2}, 0),\ \mathrm{F'}(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$$



예제 01 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

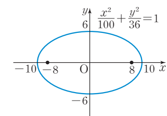
풀이 $a=10$, $b=6$이므로 $c=\sqrt{10^2-6^2}=8$

따라서 초점의 좌표는 $(8, 0)$, $(-8, 0)$

장축의 길이는 $2a=20$

단축의 길이는 $2b=12$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(10, 0)$, $(-10, 0)$, $(0, 6)$, $(0, -6)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

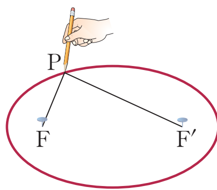


답 초점의 좌표: $(8, 0)$, $(-8, 0)$
장축의 길이: 20, 단축의 길이: 12

본문 해설

❶ 탐구 활동에서 제시된 방법 외에 직접 작도하여 타원의 정의를 이해하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 정점 F, F′에 각각 실의 양 끝을 고정시키고 연필 끝으로 실을 팽팽하게 당기면서 움직일 때, 연필의 끝점 P가 그리는 도형에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값이 일정함을 알 수 있다.



이와 같이 평면 위의 두 정점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점 P의 전체의 집합을 타원이라고 한다. 이때 두 정점 F, F′을 타원의 초점이라 하고, 두 초점을 이은 선분 FF′의 중점을 타원의 중심이라고 한다.

❷ 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$에서 초점이 x축 위에 있을 때는 $a>b$이다.

1

목표| 초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2a=6$에서 $a=3$이고, $c=2$에서

$b^2=a^2-c^2=9-4=5$이므로 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

(2) $2a=10$에서 $a=5$이고, $c=3$에서

$b^2=a^2-c^2=25-9=16$이므로 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

본문 해설

❸ 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 위의 한 점 B$(0, b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$(일정)

이때 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}$이므로 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}=a$

한편 $\overline{\mathrm{OB}}=b$이고 직각삼각형 OBF에서

$a^2=b^2+c^2$이므로 $c=\pm\sqrt{a^2-b^2}$

교과서 22 쪽

문제 2 다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (2) $9x^2+25y^2=225$

이제 두 초점이 y축 위에 놓여 있는 타원의 방정식에 대하여 알아보자.

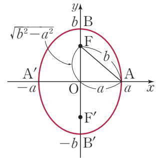
❶ 앞에서와 같은 방법으로 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b\ (b>c>0)$인 타원의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } a^2=b^2-c^2)$$

이때 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이 x축, y축과 만나는 점, 즉 꼭짓점을 A, A′, B, B′이라고 하면 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB'}}=2b$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA'}}=2a$이다.

한편 $c^2=b^2-a^2$이므로 타원의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ \mathrm{F'}(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$



이상을 정리하면 다음과 같다.

> **타원의 방정식 [2]**
> 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b\ (b>c>0)$인 타원의 방정식은
> $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } a^2=b^2-c^2)$$

보기 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 2)$, $\mathrm{F'}(0,\ -2)$로부터의 거리의 합이 8인 타원의 방정식은
$2b=8$에서 $b=4$이고, $c=2$에서 $a^2=b^2-c^2=16-4=12$이므로 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$

문제 3 다음 타원의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F'}(0,\ -5)$로부터의 거리의 합이 12인 타원

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F'}(0,\ -4)$이고 장축의 길이가 10인 타원

2

목표| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 꼴의 타원에서 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.

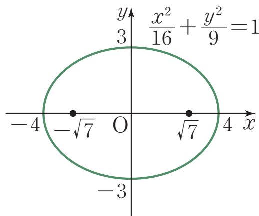
풀이| (1) $a=4$, $b=3$이므로 $c=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

따라서 초점의 좌표는 $\mathbf{(\sqrt{7},\ 0),\ (-\sqrt{7},\ 0)}$

장축의 길이는 $2a=\mathbf{8}$

단축의 길이는 $2b=\mathbf{6}$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $a=5$, $b=3$이므로

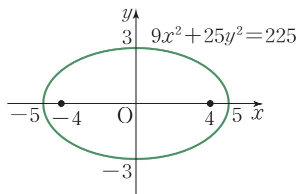
$c=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 초점의 좌표는 $\mathbf{(4,\ 0),\ (-4,\ 0)}$

장축의 길이는 $2a=\mathbf{10}$

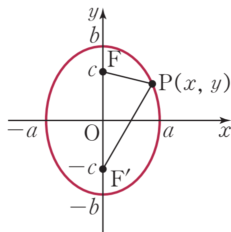
단축의 길이는 $2b=\mathbf{6}$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



본문 해설

❶ 오른쪽 그림과 같이 y축 위의 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$를 초점으로 하고 두 초점으로부터의 거리의 합이 $2b(b>c>0)$인 타원의 방정식을 구하여 보자.



타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2b$이므로

$\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2b$

$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$

$cy+b^2=b\sqrt{x^2+(y+c)^2}$

$(b^2-c^2)y^2+b^2x^2=b^2(b^2-c^2)$

여기서 $b>c>0$이므로 $a^2=b^2-c^2(a>0)$으로 놓으면

$a^2y^2+b^2x^2=b^2a^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a^2=b^2-c^2$)

3

목표| 초점이 y축 위에 있는 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2b=12$에서 $b=6$이고, $c=5$에서

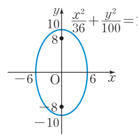
$a^2=b^2-c^2=36-25=11$이므로 $\mathbf{\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1}$

(2) $2b=10$에서 $b=5$이고, $c=4$에서

$a^2=b^2-c^2=25-16=9$이므로 $\mathbf{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$

예제 02 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

풀이 $a=6$, $b=10$이므로 $c=\sqrt{10^2-6^2}=8$
따라서 초점의 좌표는 $(0, 8)$, $(0, -8)$
장축의 길이는 $2b=20$
단축의 길이는 $2a=12$
이때 꼭짓점의 좌표는 $(6, 0)$, $(-6, 0)$, $(0, 10)$, $(0, -10)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 초점의 좌표: $(0, 8)$, $(0, -8)$
장축의 길이: 20, 단축의 길이: 12

문제 4 다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ (2) $4x^2+y^2=4$

사고력 기르기

추론
▸의사소통
문제 해결

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점이 서로 멀어지거나 가까워짐에 따라 곡선의 모양은 어떻게 변하는지 토의하여 보자.

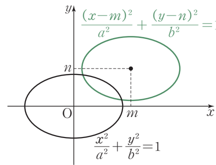
타원의 평행이동에 대하여 알아보자.
중심이 원점에 있는 타원

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 중심이 (m, n)인 타원

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

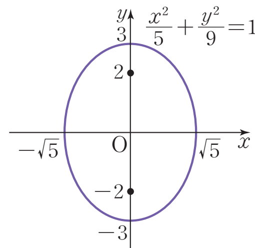
이 된다. 이때 두 초점과 꼭짓점의 좌표는 바뀌지만 장축과 단축의 길이는 변하지 않는다.



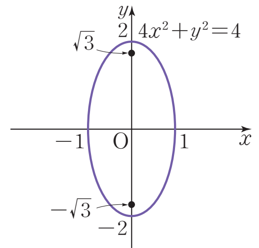
4

목표| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$ 꼴의 타원에서 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $a=\sqrt{5}$, $b=3$이므로 $c=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$
따라서 초점의 좌표는 $\mathbf{(0,\ 2),\ (0,\ -2)}$
장축의 길이는 $2b=\mathbf{6}$
단축의 길이는 $2a=\mathbf{2\sqrt{5}}$
이때 꼭짓점의 좌표는
$(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$, $(0, 3)$,
$(0, -3)$이므로 그래프는
오른쪽 그림과 같다.



(2) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$에서 $a=1$, $b=2$이므로
$c=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
따라서 초점의 좌표는 $\mathbf{(0,\ \sqrt{3}),\ (0,\ -\sqrt{3})}$
장축의 길이는 $2b=\mathbf{4}$
단축의 길이는 $2a=\mathbf{2}$
이때 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점 사이의 거리에 따른 타원의 모양을 이해하게 한다.

풀이| 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점 사이가 서로 멀어지면 장축에 가까워지는 타원이 되며 두 초점 사이가 서로 가까워지면 원에 가까워지는 타원이 된다.

5

목표| 평행이동한 타원의 초점과 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
이때 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$이고 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$이므로 주어진 타원의
초점의 좌표는 $\mathbf{(\sqrt{5}+2,\ 4),\ (-\sqrt{5}+2,\ 4)}$
꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(5,\ 4),\ (-1,\ 4),\ (2,\ 6),\ (2,\ 2)}$

(2) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
이때 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$의 초점의 좌표는 $(0, 3)$, $(0, -3)$이고 꼭짓점의 좌표는 $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$이므로 주어진 타원의
초점의 좌표는 $\mathbf{(3,\ 1),\ (3,\ -5)}$
꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(7,\ -2),\ (-1,\ -2),\ (3,\ 3),\ (3,\ -7)}$

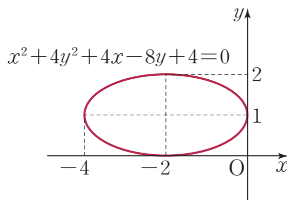
6

목표 | 주어진 방정식을 변형하여 방정식이 나타내는 도형을 그릴 수 있게 한다.

풀이 | (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{(x+2)^2}{4}+(y-1)^2=1$$

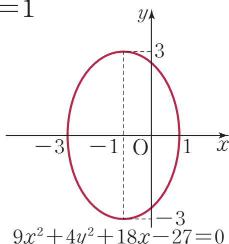
이는 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

이는 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



7

목표 | 초점과 장축의 길이가 주어졌을 때 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 타원의 중심은 두 초점의 중점이므로 $(1, 3)$이다.

이때 구하는 타원의 방정식을 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1$로 놓으면 중심에서 초점 사이의 거리가 3이고 장축의 길이가 8이므로

$2b=8$에서 $b=4$

$a^2=4^2-3^2=7$이므로 구하는 타원의 방정식은

$$\mathbf{\frac{(x-1)^2}{7}+\frac{(y-3)^2}{16}=1}$$

교과서 24 쪽

문제 5 다음 타원의 초점과 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

(1) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$ (2) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

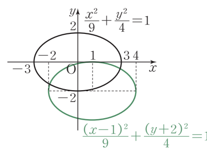
예제 03 방정식 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 $4(x^2-2x)+9(y^2+4y)+4=0$에서

$4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$

따라서 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$이 된다.

이는 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



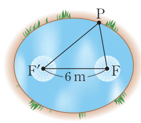
문제 6 다음 방정식이 나타내는 도형을 그려라.

(1) $x^2+4y^2+4x-8y+4=0$ (2) $9x^2+4y^2+18x-27=0$

발전 **문제 7** 두 초점이 $F(1, 6)$, $F'(1, 0)$이고 장축의 길이가 8인 타원의 방정식을 구하여라.

창의 up

오른쪽 그림과 같은 타원 모양의 연못이 있다. 타원의 두 초점 F, F′의 위치에 있는 두 분수대 사이의 거리는 6 m이다. 연못의 둘레의 한 점 P에서 두 분수대까지의 거리의 합이 10 m일 때, 삼각형 PF′F의 넓이의 최댓값을 구하는 방법을 설명하여라.



창의 UP

출제 의도 | 타원의 정의를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 오른쪽 그림과 같이 타원 모양의 연못을 좌표평면 위에 나타내면 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이 되고, 이때 타원의 방정식을

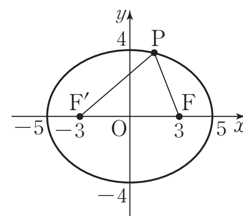
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>b>0$)

이라고 하면 $2a=10$에서 $a=5$, $b=4$

삼각형 PF′F에서 $\overline{FF'}$을 밑변으로 생각하면 높이는 점 P의 좌표가 $P(0,\ 4)$일 때 최대가 된다.

따라서 삼각형 PF′F의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times6\times4=$**12(m²)**



교과서 25 쪽

03 쌍곡선

● 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

쌍곡선의 방정식은 어떻게 구하는가?

생각 열기

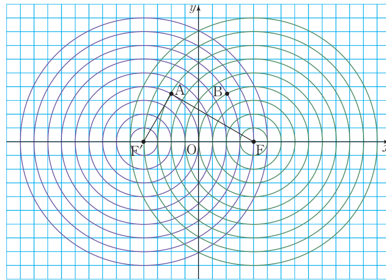
항법 장치(Navigation Equipment)



제2차 세계 대전 중에 먼 바다를 항해하는 군함의 위치를 정확하게 파악하기 위하여, 멀리 떨어진 두 기지에서 군함으로 동시에 전파를 보낸 후 두 전파가 군함에 도달하는 데 걸린 시간의 차를 이용하는 항법 장치가 고안되었다. 요즘은 인공위성을 이용하여 입체적으로 위치를 추적할 수 있는 장치가 많이 개발되었으며, 자동차에 장착하여 사용할 정도로 널리 보급되었다.

탐구 활동

군함의 위치를 파악하는 항법 장치의 원리는 원을 이용하여 나타낼 수 있다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 각각 점 $\mathrm{F}(4, 0)$, 점 $\mathrm{F'}(-4, 0)$이고, 반지름의 길이가 각각 $1, 2, 3, \cdots, 9$인 원이 있다. 물음에 답하여 보자.



1. 점 A는 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 3인 점이다. 점 B에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차를 구하여 보자.
2. 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 3인 점들을 찾아 그림에 표시하여 보자.
3. 2에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

03 쌍곡선

소단원 지도 목표

① 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 쌍곡선의 방정식에서 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이를 구할 수 있게 한다.
③ 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.
④ 쌍곡선의 평행이동을 이해하게 한다.
⑤ 이차곡선의 뜻을 알게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 쌍곡선에 관련된 용어를 정의할 때, 구체적인 예를 보이면서 정의한다.

2. 쌍곡선의 두 초점이 x축 또는 y축에 평행한 직선 위에 있는 것만 다룬다.

3. 그래프는 점근선과 꼭짓점을 이용하여 그 개형을 그리게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 쌍곡선(雙曲線, hyperbola)
- 쌍곡선의 초점(雙曲線 — 焦點, focus of hyperbola)
- 쌍곡선의 꼭짓점(vertex of hyperbola)
- 쌍곡선의 중심(雙曲線 — 中心, center of hyperbola)
- 쌍곡선의 주축(雙曲線—主軸, principal axis of hyperbola)
- 쌍곡선의 점근선(雙曲線—漸近線, asymptotic line of hyperbola)
- 이차곡선(二次曲線, quadratic curve)

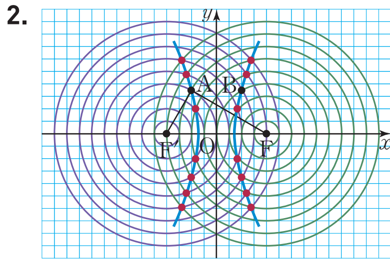
생각 열기 참/고/자/료

멀리 떨어진 두 송신국과 바다 한가운데에 있는 배와의 거리는 어떻게 측정할까? 그 거리를 정확히는 알 수 없어도 두 송신국에서 배로 동시에 보낸 전파가 도달하는 데 걸리는 시간 차를 이용하여 배의 위치를 알아낼 수 있다. 이것이 제2차 세계 대전 중에 개발된 쌍곡선 항법(hyperbolic navigation)이다.
이러한 쌍곡선 항법은 측량이나 해저 케이블의 부설, 부표의 설치 등에 널리 사용되기도 하였고, 오늘날에는 인공위성을 이용한 GPS(Global Positioning System)가 이를 대신하여 선박이나 비행기의 운항 관제, 개인의 위치 추적 등에 사용되고 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 3인 점을 나타내 보고, 이 점들을 연결할 때 어떤 모양의 도형을 이루는지 관찰하게 하여 쌍곡선의 뜻과 성질을 이해하게 하려는 것이다.

1. 점 B에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차는 3이다.

2. 

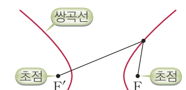
두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 3인 점은 위의 그림에서 빨간색 점이다.

3. 위의 그림의 파란색 선과 같다.

교과서 26 쪽

● 쌍곡선은 영어로 하이퍼볼라(hyperbola)라고 한다.

❶ 탐구 활동에서와 같이 평면 위의 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 **쌍곡선**이라고 하며, 두 점 F, F′을 쌍곡선의 **초점**이라고 한다.



먼저 x축 위의 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 두 초점 F, F′으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구하여 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$$

이므로

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$
$$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

이다. 여기서 $c>a>0$이므로 $b^2=c^2-a^2$ $(b>0)$으로 놓으면

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

이다. 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ 사이의 거리를 각각 구하여서 차를 구하여 보면 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$가 성립한다. 즉, 점 P는 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$인 쌍곡선 위의 점이 된다.

따라서 방정식 ①은 구하는 쌍곡선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

● 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이다.

❷ **쌍곡선의 방정식 [1]**

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b^2=c^2-a^2)$$

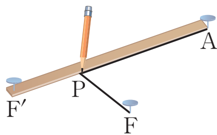
보기 두 초점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-3,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은

$2a=4$에서 $a=2$이고, $c=3$에서 $b^2=c^2-a^2=3^2-2^2=5$이므로 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

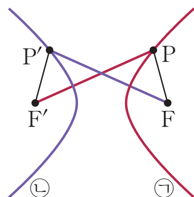
본문 해설

❶ 탐구 활동에서 제시된 방법 외에 직접 작도하여 쌍곡선의 정의를 이해하여 보자.

다음 그림과 같이 막대의 한쪽 끝 F′을 고정시켜 막대가 회전할 수 있도록 하고 실의 한 끝을 막대의 한쪽 끝 A에, 다른 끝을 F에 고정시킨다.



연필을 막대에 붙여 실을 팽팽하게 당기면서 막대를 회전시킬 때, 연필의 끝점 P의 자취는 오른쪽 그림과 곡선 ㉠과 같다.



또 위치를 바꾸어 막대의 한 끝을 점 F에 고정시키고 실의 한 끝을 점 F′에 고정시켰을 때, 연필의 끝점 P′의 자취는 위의 그림의 곡선 ㉡과 같다.

이때 점 P의 위치에 관계없이 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|$의 값이 일정함을 알 수 있다.

예를 들어 막대의 길이를 l, 실의 길이를 m이라고 하면

$\overline{\mathrm{AF'}}=l$, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF}}=m$

$\overline{\mathrm{PF}}=x$로 놓으면 $\overline{\mathrm{PA}}=m-x$

$\overline{\mathrm{PF'}}=l-\overline{\mathrm{PA}}=l-m+x$이므로

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=|x-l+m-x|=|m-l|$

즉, 실의 길이와 막대의 길이의 차로 일정하다.

이와 같이 평면 위의 두 정점 F, F′으로부터 거리의 차가 일정한 점 P의 전체의 집합을 쌍곡선이라고 한다.

❷ 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$에서 초점이 x축 위에 있을 때는 우변이 1이다.

지/도/자/료 쌍곡선의 대칭성

쌍곡선의 방정식을 $f(x,\ y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$로 놓으면

(1) $f(x,\ -y)=f(x,\ y)$이므로 주어진 쌍곡선은 x축에 대하여 대칭이다.

(2) $f(-x,\ y)=f(x,\ y)$이므로 주어진 쌍곡선은 y축에 대하여 대칭이다.

(3) $f(-x,\ -y)=f(x,\ y)$이므로 주어진 쌍곡선은 원점에 대하여 대칭이다.

교과서 27 쪽

문제 1 다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

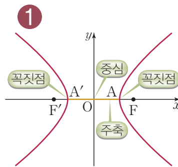
(1) 두 초점 F(6, 0), F′(−6, 0)으로부터의 거리의 차가 10인 쌍곡선

(2) 두 초점 F(2, 0), F′(−2, 0)으로부터의 거리의 차가 2인 쌍곡선

❶ 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 x축과 만나는 점의 좌표는

$A(a, 0), A'(-a, 0)$

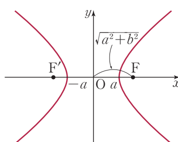
이다. 이때 두 점 A, A′을 쌍곡선의 **꼭짓점**, $\overline{AA'}$을 쌍곡선의 **주축**, $\overline{AA'}$의 중점을 쌍곡선의 **중심**이라고 한다.



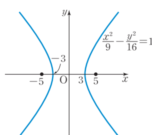
❷ 또 주축의 길이는 $\overline{AA'}=2a$이다.

한편 $c^2=a^2+b^2$이므로 쌍곡선의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$F(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $F'(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$



예제 01 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하여라.



풀이 $a=3$, $b=4$이므로 $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 초점의 좌표는 (5, 0), (−5, 0)

주축의 길이는 $2a=6$

이때 꼭짓점의 좌표는 (3, 0), (−3, 0)이다.

답 초점의 좌표: (5, 0), (−5, 0)

주축의 길이: 6

1

목표| 초점이 x축 위에 있는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2a=10$에서 $a=5$이고, $c=6$에서

$b^2=c^2-a^2=36-25=11$이므로 $\quad \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$

(2) $2a=2$에서 $a=1$이고, $c=2$에서

$b^2=c^2-a^2=4-1=3$이므로 $\quad x^2-\frac{y^2}{3}=1$

본문 해설

❶ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점과 주축은 x축 위에 있고, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라고 한다. 이때 쌍곡선은 주축과 중심에 대하여 각각 대칭이다. 또 주축의 수직이등분선에 대하여도 대칭이다.

❷ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 x축과 만나는 두 점 A, A′의 좌표는 각각 $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$이다.

이때

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|$

$=|\overline{AF}-\overline{AF'}|$

$=|\overline{AF}-\overline{A'F}|$

$=|(\sqrt{a^2+b^2}-a)-(a+\sqrt{a^2+b^2})|$

$=2a$

$=\overline{AA'}$

따라서 쌍곡선에서 일정한 거리의 차는 주축의 길이와 같음을 알 수 있다.

즉, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서

(일정한 거리의 차)=(주축의 길이)

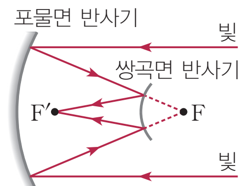
$=2a$

읽/기/자/료 쌍곡선의 활용

1672년 프랑스의 카세그레인(Cassegrain, S.)이 포물선과 쌍곡선의 성질을 이용하여 만든 천문 관측용 반사 망원경 중 하나인 카세그레인식 망원경(Cassegrain's Telescope)은 거리가 먼 우주의 행성을 관측하는 데 사용하는 기구이다.

이 망원경의 원리를 이용하여 포물면 반사기와 쌍곡면(쌍곡선을 주축 둘레로 회전시켜 얻은 곡면)반사기를 조합하여 만든 안테나를 카세그레인 안테나라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 포물면의 초점과 쌍곡면의 한 초점 F를 일치시키고, 쌍곡면의 다른 초점 F′에 전파 수신기를 일치시키면 포물면의 축과 평행하게 들어온 전파는 포물면에서 반사된다. 이때 포물면과 쌍곡면의 초점이 일치하므로 반사된 전파는 쌍곡면의 다른 초점인 수신기의 끝에 모이게 된다.



이외에도 발전소나 공장의 냉각탑에서 쌍곡면의 광학적 특성이 응용된다.

2

목표| $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 꼴의 쌍곡선에서 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a=2$, $b=3$이므로

$c=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

따라서 초점의 좌표는

$\mathbf{(\sqrt{13},\ 0),\ (-\sqrt{13},\ 0)}$

꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(2,\ 0),\ (-2,\ 0)}$

주축의 길이는 $\mathbf{2a=4}$

(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$에서 $a=2$, $b=2$이므로

$c=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

따라서 초점의 좌표는

$\mathbf{(2\sqrt{2},\ 0),\ (-2\sqrt{2},\ 0)}$

꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(2,\ 0),\ (-2,\ 0)}$

주축의 길이는 $\mathbf{2a=4}$

교과서 28 쪽

문제 2 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이를 구하여라.

(1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ (2) $x^2-y^2=4$

이제 두 초점이 y축 위에 놓여 있는 쌍곡선의 방정식에 대하여 알아보자.

❶ 앞에서와 같은 방법으로 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2=c^2-b^2\text{)}$$

❷ 이때 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이 y축과 만나는 점, 즉 꼭짓점의 좌표는

$$\mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.

한편 $c^2=a^2+b^2$이므로 쌍곡선의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **쌍곡선의 방정식 [2]**
>
> 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식은
>
> $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2=c^2-b^2\text{)}$$

● 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$을 켤레쌍곡선이라고 한다.

보기 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은 $2b=4$에서 $b=2$이고, $c=3$에서 $a^2=c^2-b^2=9-4=5$이므로 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

문제 3 다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F}'(0,\ -5)$로부터의 거리의 차가 6인 쌍곡선

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 7)$, $\mathrm{F}'(0,\ -7)$이고 주축의 길이가 12인 쌍곡선

본문 해설

❶ y축 위의 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$를 초점으로 하고, 두 초점으로부터 거리의 차가 $2b(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구하여 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}|=2b$이므로

$|\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)^2}|=2b$

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)^2}=\pm 2b$

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=\sqrt{x^2+(y-c)^2}\pm 2b$

$cy-b^2=\pm b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$

$(c^2-b^2)y^2-b^2x^2=b^2(c^2-b^2)$

여기서 $c>b>0$이므로 $a^2=c^2-b^2(a>0)$으로 놓으면

$a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

❷ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 초점과 주축은 y축 위에 있다.

3

목표| 초점이 y축 위에 있는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2b=6$에서 $b=3$이고, $c=5$에서

$a^2=c^2-b^2=25-9=16$이므로

$\mathbf{\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1}$

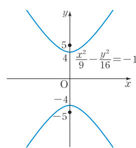
(2) $2b=12$에서 $b=6$이고, $c=7$에서

$a^2=c^2-b^2=49-36=13$이므로

$\mathbf{\dfrac{x^2}{13}-\dfrac{y^2}{36}=-1}$

교과서 29 쪽

예제 02 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하여라.



풀이 $a=3$, $b=4$이므로 $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 5)$, $(0, -5)$

주축의 길이는 $2b=8$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$, $(0, -4)$이다.

답 초점의 좌표: $(0, 5)$, $(0, -5)$

주축의 길이: 8

문제 4 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이를 구하여라.

(1) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$ (2) $x^2-y^2=-1$

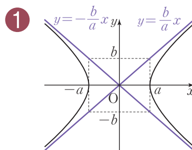
쌍곡선의 방정식

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

을 y에 대하여 풀면

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

❶



이다. 여기서 $|x|$의 값이 한없이 커지면 $\frac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$와 $y=-\frac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다. 이 두 직선을 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 **점근선**이라고 한다.

같은 방법으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **쌍곡선의 점근선**

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

본문 해설

❶ 쌍곡선의 표준형으로 점근선의 방정식을 구하고, 점근선과 꼭짓점을 이용하여 그래프를 그린다.
이때 점근선은 접선이 아니며 쌍곡선과 만나지 않는다.

❷ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$
이다. 이때 두 점근선을 변형하면

$y=\frac{b}{a}x$에서 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ ……①

$y=-\frac{b}{a}x$에서 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ ……②

①, ②를 하나의 식으로 나타내면

$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$

즉, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

이는 쌍곡선의 방정식의 우변을 0으로 놓은 것과 같다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$의 점근선은

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ ➡ $y=\pm\frac{b}{a}x$

4

목표 | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 꼴의 쌍곡선에서 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $a=\sqrt{3}$, $b=2$이므로

$c=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$

따라서 초점의 좌표는 $\mathbf{(0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})}$

꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(0, 2), (0, -2)}$

주축의 길이는 $\mathbf{2b=4}$

(2) $a=1$, $b=1$이므로

$c=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

따라서 초점의 좌표는 $\mathbf{(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})}$

꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(0, 1), (0, -1)}$

주축의 길이는 $\mathbf{2b=2}$

지/도/자/료 여러 가지 함수의 점근선

함수	점근선
$y=\frac{k}{x-a}+b$	$x=a$, $y=b$
$y=x+\frac{1}{x}$	$x=0$, $y=x$
$y=\frac{1}{x^2+1}$	$y=0$
$y=a^x$	$y=0$
$y=\log_a x$	$x=0$

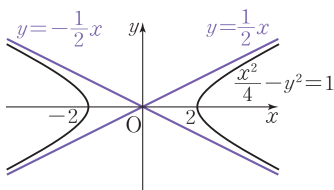
5

목표| 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고, 쌍곡선과 점근선의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $a=2$, $b=1$이므로 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{1}{2}x$$

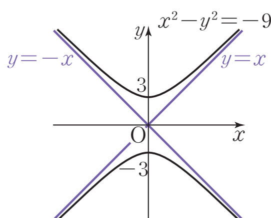
따라서 주어진 쌍곡선과 점근선의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=-1$에서 $a=3$, $b=3$이므로 점근선의 방정식은

$$y=\pm x$$

따라서 주어진 쌍곡선과 점근선의 그래프는 다음 그림과 같다.



사고력 기르기 의사소통

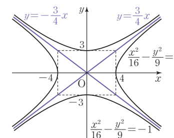
출제 의도| 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점 사이의 거리에 따른 곡선의 모양을 이해하게 한다.

풀이| 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 초점이 서로 멀어지면 두 곡선이 원점에서 멀어지는 쌍곡선이 되고, 두 초점이 서로 가까워지면 두 곡선이 원점에 가까워지는 쌍곡선이 된다.

교과서 30 쪽

보기 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$과 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$의 점근선의 방정식은 $a=4$, $b=3$이므로

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$



문제 5 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고, 쌍곡선과 점근선의 그래프를 그려라.

(1) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　(2) $x^2-y^2=-9$

사고력 기르기

추론
▸의사소통
문제 해결

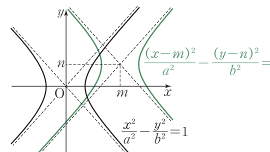
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점이 서로 멀어지거나 가까워짐에 따라 곡선의 모양은 어떻게 변하는지 토의하여 보자.

쌍곡선의 평행이동에 대하여 알아보자.
중심이 원점에 있는 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 중심이 (m, n)인 쌍곡선

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$



이 된다. 이때 두 초점과 꼭짓점의 좌표는 바뀌지만 주축의 길이는 변하지 않는다.

지/도/자/료 쌍곡선의 방정식의 일반형

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$을 x축, y축의 방향으로 각각 p, q만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=\pm1$$

의 양변에 a^2b^2을 곱한 후, 전개하여 정리하면

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2px+2a^2qy+b^2p^2-a^2q^2\pm a^2b^2=0$$

이 식의 계수들을 일반화하면

$$Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0(\text{단, } AB<0)$$

이 식의 좌변이 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않을 때, 이 식을 쌍곡선의 방정식의 일반형이라고 한다.

문제 6 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

(1) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$　　(2) $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=-1$

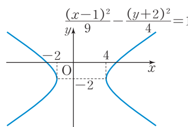
예제 03 방정식 $4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 $4(x^2-2x)-9(y^2+4y)-68=0$에서

$4(x-1)^2-9(y+2)^2=36$

따라서 $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$이 된다.

이는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



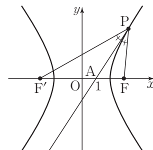
문제 7 다음 방정식이 나타내는 도형을 그려라.

(1) $x^2-4y^2+4x+8y-4=0$　　(2) $x^2-y^2-6x+4y+9=0$

발전 **문제 8** 두 초점 F(1, 8), F′(1, 0)으로부터의 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

창의 up

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 ∠F′PF의 이등분선이 x축과 점 A(1, 0)에서 만날 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이를 구하는 방법을 설명하여라.



6

목표| 평행이동한 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{13},\ 0)$, $(-\sqrt{13},\ 0)$이고 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표는 $\mathbf{(\sqrt{13}+1,\ 2),\ (-\sqrt{13}+1,\ 2)}$

꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(4,\ 2),\ (-2,\ 2)}$

(2) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$의 초점의 좌표는 $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$이고 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$이므로 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표는 $\mathbf{(3,\ 3),\ (3,\ -7)}$

꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(3,\ 2),\ (3,\ -6)}$

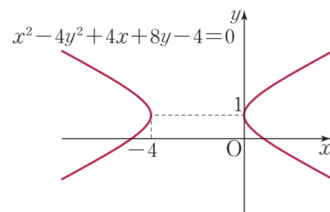
7

목표| 주어진 방정식을 변형하여 방정식이 나타내는 도형을 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{(x+2)^2}{4}-(y-1)^2=1$$

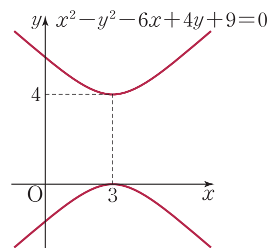
이는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=-1$$

이는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



8

목표| 초점과 두 초점으로부터의 거리의 차가 주어진 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 쌍곡선의 중심은 두 초점의 중심이므로 $(1,\ 4)$이다. 이때 주축이 y축과 평행하므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-4)^2}{b^2}=-1$로 놓으면 두 초점으로부터의 거리의 차가 6이므로　$2b=6$, $b=3$

또 두 초점 사이의 거리가 8이므로　$2c=8$, $c=4$

$a^2=c^2-b^2=16-9=7$이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\mathbf{\frac{(x-1)^2}{7}-\frac{(y-4)^2}{9}=-1}$$

창의 UP

출제 의도| 쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$에서 $a=2$, $b=\sqrt{5}$이므로

$c=\sqrt{4+5}=3$

$\overline{\mathrm{PF'}}=s$, $\overline{\mathrm{PF}}=t$ $(s>t)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$s-t=4$ …… ①

삼각형의 각의 이등분선의 정리에 의하여

$s : t=4 : 2$이므로 $s=2t$ …… ②

①, ②에서 $s=8$, $t=4$

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{PF}}=8+6+4=\mathbf{18}$

본문 해설

❶ $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$이 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 중 어느 하나라고 할 때, 이를 간단히 분류하는 방법은 다음과 같다.

(1) $A=B$이고 $C=0$이면 원

(2) $A\neq0$이고 $B=0$ 또는 $A=0$이고 $B\neq0$이면 포물선

(3) $AB>0$이고 $A\neq B$이면 타원

(4) $AB<0$이면 쌍곡선

교과서 32 쪽

이차곡선이란 무엇인가?

이차곡선으로 나타나지 않는 x, y에 대한 이차방정식
① $x^2+y^2=0$
오직 한 점, 즉 원점을 나타낸다.
② $(ax+by+c)(dx+ey+f)=0$
두 직선 $ax+by+c=0$, $dx+ey+f=0$을 나타낸다.
③ $x^2+y^2+1=0$
점, 직선, 곡선으로 나타낼 수 없다.

앞에서 배운 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 x, y에 대한 이차방정식으로 나타내어진다.

일반적으로 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

❶ $$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

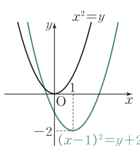
으로 나타내어지는 곡선을 **이차곡선**이라고 한다.

예제 04 방정식 $x^2-2x-y-1=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

풀이 방정식 $x^2-2x-y-1=0$을 변형하면

$$(x-1)^2=y+2$$

따라서 이 방정식은 축이 y축인 포물선 $x^2=y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.



답 포물선

문제 9 다음 방정식은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

(1) $2x^2+y^2-18=0$ (2) $3x^2-y^2-6x+4y-4=0$

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

이차곡선을 좌표평면 위에 나타내면 각각의 방정식은 모두 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$의 꼴로 나타내어진다.

원: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$, 포물선: $(x-m)^2=4p(y-n)$, $(y-n)^2=4p(x-m)$,
타원: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$, 쌍곡선: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$

이차곡선 $x^2-5y^2+4x-1=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

9

목표| 주어진 도형이 어떤 이차곡선인지 말할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2x^2+y^2=18$에서 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{18}=1$

따라서 주어진 방정식은 **타원**을 나타낸다.

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$3(x^2-2x)-(y^2-4y)-4=0$에서

$(x-1)^2-\dfrac{(y-2)^2}{3}=1$

따라서 주어진 방정식은 **쌍곡선**을 나타낸다.

단원 과제

목표| 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식이 어떤 도형을 나타내는지 말할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 방정식을 변형하면

$(x^2+4x)-5y^2-1=0$에서

$\dfrac{(x+2)^2}{5}-y^2=1$

따라서 이차곡선 $x^2-5y^2+4x-1=0$은

$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$의 형태이므로 **쌍곡선**을 나타낸다.

교과서 33 쪽

중단원 기초

[해답 p.204]

수준별 학습

1 다음 포물선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 준선의 방정식을 구하여라.

(1) $y^2=-16x$ (2) $x^2=\frac{1}{2}y$

01 포물선 / 포물선의 방정식

2 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 F(2, 0)이고 꼭짓점이 원점인 포물선

(2) 준선이 x축이고 꼭짓점이 A(1, 1)인 포물선

01 포물선 / 포물선의 평행이동

3 다음 타원의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점이 F(2, 0), F′(−2, 0)이고 장축의 길이가 8인 타원

(2) 한 초점이 F(0, 2)이고 중심이 원점이며 단축의 길이가 4인 타원

02 타원 / 타원의 방정식

4 다음 타원의 두 초점과 꼭짓점의 좌표 및 장축, 단축의 길이를 구하여라.

(1) $x^2+4y^2=4$ (2) $3x^2+2y^2=6$

02 타원 / 타원의 장축과 단축

5 다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점이 F(2, 0), F′(−2, 0)이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선

(2) 한 꼭짓점이 A(0, 2)이고 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{2}{3}x$인 쌍곡선

03 쌍곡선 / 쌍곡선의 방정식

6 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이와 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $x^2-2y^2=2$ (2) $3x^2-2y^2=-6$

03 쌍곡선 / 쌍곡선의 점근선

중/단/원 기초

1

목표| 포물선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 준선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 초점의 좌표: $(-4, 0)$, 꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$, 준선의 방정식: $x=4$

(2) 초점의 좌표: $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, 꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$, 준선의 방정식: $y=-\frac{1}{8}$

2

목표| 주어진 조건을 이용하여 포물선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y^2=4px$에서 $p=2$이므로 $y^2=8x$

(2) 포물선의 초점의 좌표는 (1, 2)이므로 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 구하는 포물선의 방정식은 $(x-1)^2=4(y-1)$

3

목표| 주어진 조건을 이용하여 타원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

(2) $2a=4$에서 $a=2$이고 $c=2$에서

$b^2=a^2+c^2=4+4=8$이므로 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$

4

목표| 타원의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 장축, 단축의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$

장축의 길이: 4, 단축의 길이: 2

(2) 초점의 좌표: $(0, 1)$, $(0, -1)$

꼭짓점의 좌표: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$

장축의 길이: $2\sqrt{3}$, 단축의 길이: $2\sqrt{2}$

5

목표| 주어진 조건을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

(2) $b=2$이고, $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$에서 $a=3$

이므로 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$

6

목표| 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이와 점근선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

주축의 길이: $2\sqrt{2}$, 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

(2) 초점의 좌표: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$

꼭짓점의 좌표: $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$

주축의 길이: $2\sqrt{3}$, 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$

중/단/원 기본

1

목표| 포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 P와 초점 F 사이의 거리가 5이므로 점 P와 준선 $x=-1$ 사이의 거리도 5이다.

즉, $a+1=5$에서 $a=4$

점 P(a, b)가 포물선 위의 점이므로

$b^2=4a$에서 $b^2=4\times4=16$

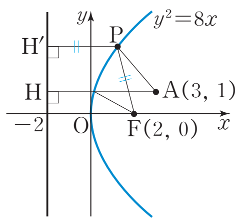
$b>0$이므로 $b=4$

따라서 $a+b=4+4=\mathbf{8}$

2

목표| 포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 두 점 A, P에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하면 $\overline{\text{FP}}=\overline{\text{PH}'}$



$\overline{\text{FP}}+\overline{\text{AP}}$

$=\overline{\text{PH}'}+\overline{\text{AP}}\ge\overline{\text{AH}}$

$=|3-(-2)|=\mathbf{5}$

교과서 34 쪽

중단원 기본

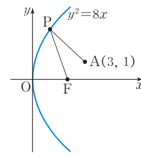
[해답 p.205]

수준별 학습

1 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P(a, b)와 초점 F 사이의 거리가 5일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

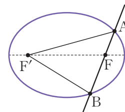
01 포물선
포물선의 정의

2 포물선 $y^2=8x$에 대하여 초점 F와 점 A(3, 1)에서 포물선 위의 임의의 한 점 P에 이르는 거리의 합 $\overline{\text{FP}}+\overline{\text{AP}}$의 최솟값을 구하여라.



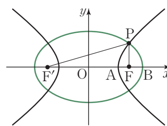
01 포물선
포물선의 정의

3 오른쪽 그림과 같은 타원에서 초점은 F, F′이고, 장축의 길이는 10이다. 초점 F를 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 A, B라고 할 때, 삼각형 AF′B의 둘레의 길이를 구하여라.



02 타원
타원의 정의

4 오른쪽 그림과 같이 두 초점 F, F′을 공유하는 타원과 쌍곡선의 한 교점을 P, 쌍곡선과 타원이 x축의 양의 부분과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{\text{PF}'}+\overline{\text{PF}}=4$, $\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{PF}}=2$일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.



02 타원 03 쌍곡선
타원과 쌍곡선의 정의

5 쌍곡선 $x^2-3y^2=3$의 두 점근선이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

03 쌍곡선
쌍곡선의 점근선

3

목표| 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{\text{AF}'}+\overline{\text{AF}}=10$, $\overline{\text{BF}'}+\overline{\text{BF}}=10$이므로 삼각형 AF′B의 둘레의 길이는

$\overline{\text{AF}'}+\overline{\text{BF}'}+\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AF}'}+\overline{\text{BF}'}+\overline{\text{AF}}+\overline{\text{BF}}$

$=(\overline{\text{AF}'}+\overline{\text{AF}})+(\overline{\text{BF}'}+\overline{\text{BF}})$

$=10+10=\mathbf{20}$

4

목표| 타원과 쌍곡선의 정의를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{\text{PF}'}+\overline{\text{PF}}=4$이므로 장축의 길이는 4이고 점 B의 좌표는 (2, 0)이다.

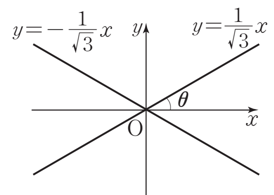
$\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{PF}}=2$이므로 주축의 길이는 2이고 점 A의 좌표는 (1, 0)이다.

따라서 $\overline{\text{AB}}=\mathbf{1}$

5

목표| 쌍곡선의 두 점근선이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$이므로



점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이다.

직선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라고 하면

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는 $\mathbf{\dfrac{\pi}{3}}$이다.

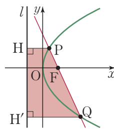
교과서 35 쪽

중단원 실력

[해답 p.205]

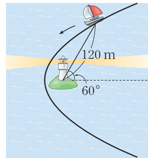
수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하자. $\overline{PQ}=12$, $\overline{HH'}=11$일 때, 사각형 HH′QP의 넓이를 구하여라.



01 포물선
포물선의 정의

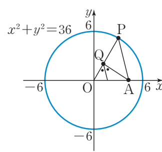
2 오른쪽 그림과 같이 등대를 초점으로 하는 포물선 궤도를 따라 움직이는 배가 있다. 배와 등대 사이의 거리가 120 m일 때, 배와 등대를 잇는 선분이 포물선의 대칭축과 이루는 각의 크기는 60°이다. 이 배가 등대에 가장 가까워졌을 때, 등대로부터 배까지의 거리를 구하여라. (단, 배와 등대의 크기는 무시한다.)



01 포물선
포물선의 정의

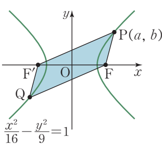
3 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a, b)$ $(b\neq0)$와 점 $\mathrm{A}(4, 0)$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 점 Q를 나타내는 방정식을 구하여라.

- 점 Q는 선분 OP 위에 있다.
- 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 ∠OQA를 이등분한다.



02 타원
타원의 평행이동

4 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 꼭짓점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 원점에 대하여 대칭인 점을 Q라고 하자. 사각형 F′QFP의 넓이가 30일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.



03 쌍곡선
쌍곡선의 정의

중/단/원 실력

1

목표| 포물선의 정의를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{PH}=\overline{PF}$, $\overline{QH'}=\overline{QF}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PH}+\overline{QH'}=12$

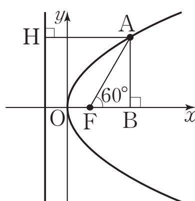
따라서 사각형 HH′QP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{PH}+\overline{QH'})\times\overline{HH'}=\frac{1}{2}\times12\times11=\mathbf{66}$

2

목표| 포물선의 정의를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 포물선의 꼭짓점을 원점으로 하고 등대를 x축 위의 점 F에 오도록 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이때 포물선 위의 점 A에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 B, H라고 하면



$\overline{AF}=\overline{AH}=120(\mathrm{m})$

$\overline{FB}=120\cos60°=60(\mathrm{m})$

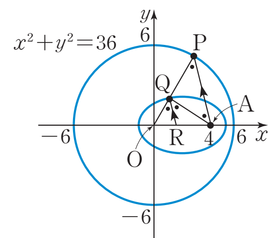
$\overline{OF}=\frac{1}{2}(\overline{AH}-\overline{FB})=30(\mathrm{m})$

따라서 구하는 거리는 배가 원점 O에 있을 때이므로 **30 m**이다.

3

목표| 타원의 정의와 평행이동을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R라고 하면



∠OQR=∠QPA(동위각),

∠RQA=∠QAP(엇각)

△PQA는 이등변삼각형이므로 $\overline{QA}=\overline{QP}$

원 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}=6$으로 항상 일정하므로 점 Q의 자취는 두 점 O, A를 초점으로 하는 타원 위의 점이 된다.

이 타원은 두 초점으로부터의 거리의 합이 6이고 중심이 (2, 0)이므로

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\ (\text{단, } y\neq0)$$

4

목표| 쌍곡선의 정의를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 쌍곡선의 두 초점은 F(5, 0), F′(−5, 0)이므로

$\overline{FF'}=10$

△PF′F=△QFF′이므로

$\frac{1}{2}\times10\times|b|=15$에서 $|b|=3$

이때 점 P(a, b)는 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{a^2}{16}-\frac{3^2}{9}=1$에서 $a^2=32$

따라서 $a^2+b^2=32+9=\mathbf{41}$

2 평면 곡선의 접선

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 음함수의 미분	음함수의 미분법
	이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식
02 매개변수로 나타낸 함수의 미분	매개변수로 나타낸 함수의 도함수
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 미분법은 여러 영역에서 널리 사용되고 있는 계산법으로 다양한 함수들에 대한 도함수를 구할 수 있어야 한다. 이 단원에서는 “미적분Ⅱ”의 미분법에서 다룬 함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법과 더불어 음함수의 미분법, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 지도함으로써 미분법을 자유롭게 사용하고 활용할 수 있게 한다. 특히 음함수의 미분법, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하는 방법을 지도한다.

교과서 36 쪽

2 평면 곡선의 접선

사이클로이드(cycloid)

사이클로이드는 바퀴라는 의미의 그리스 어에서 나온 말로, 한 원이 직선 위를 굴러갈 때 이 원 위의 한 점이 그리는 자취이다. 원통의 가장자리에 발광 다이오드를 붙이고 굴리는 것을 카메라의 노출 시간을 길게 해서 촬영하면 사진에는 반원과 비슷한 모양의 곡선이 나타나게 되는데 이것이 사이클로이드이다.



자연 속에서 사이클로이드를 쉽게 찾을 수 있는데 독수리는 땅 위에 있는 들쥐나 토끼, 뱀 등 먹이를 잡으려고 낙하할 때, 신속한 사냥을 위해 직선이 아닌 사이클로이드와 가까운 곡선을 그리며 목표물로 향한다. 또 물고기의 비늘에도 사이클로이드 곡선이 숨어 있다. 그리고 우리나라 전통 가옥의 기와 역시 사이클로이드 곡선 모양을 하고 있어 비로 인한 목조 건물의 부식을 막을 수 있다.







단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 48쪽

사이클로이드 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있을까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	상	음함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식과 관련한 문제를 해결할 수 있다.
	중	음함수의 미분법을 이용하여 간단한 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	음함수의 뜻을 알고, 중심이 원점인 타원, 쌍곡선 등의 이차곡선의 방정식의 꼴로 주어진 음함수를 미분할 수 있다.
2. 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	상	매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식과 관련한 문제를 해결할 수 있다.
	중	매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 간단한 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	매개변수로 나타낸 함수의 뜻을 알고, 일차식, 이차식 등으로 표현된 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

교과서 37 쪽

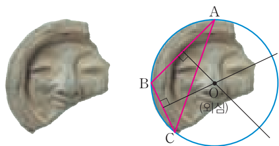
01 음함수의 미분

● 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

음함수는 어떻게 미분하는가?

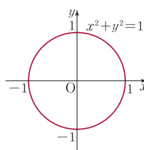
생각 열기 **수막새를 복원하는 외심**

기와지붕의 끝 부분 처마는 지붕 끝을 마무리하는 기와인 암막새와 수막새로 마감되어 있다. 7세기경의 신라 유물로 알려진 얼굴 무늬 수막새는 경주 영묘사지에서 완전한 모습이 아닌 이미 깨어진 모습으로 발굴되었다. 이렇게 원 모양이었던 얼굴 무늬 수막새를 복원하여 그 완전한 모습을 재현하려면 원의 중심을 찾아야 한다.



탐구 활동 오른쪽 그림은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 원의 방정식 $x^2+y^2=1$은 함수인지 아닌지 말하여 보자.
2. 원의 방정식 $x^2+y^2=1$에서 y를 x에 대하여 정리하여 보자.
3. 2에서 얻은 결과는 함수인지 아닌지 말하여 보자.



원의 방정식 $x^2+y^2=1$은 구간 $(-1, 1)$에 속하는 임의의 x의 값에 대하여 대응되는 y의 값이 두 개이므로 y는 x에 대한 함수가 아니다. 그러나 y값의 범위를 $y\geq0$ 또는 $y\leq0$으로 정하면 y는 x에 대한 함수가 된다.

일반적으로 방정식 $f(x, y)=0$은 x와 y가 정의되는 구간을 적당히 정하면 y는 x에 대한 함수가 된다. 이와 같이 x에 대한 함수 y가 방정식 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y는 x의 **음함수** 꼴로 표현되었다고 한다.

예를 들어 $x^2+y^2-1=0$, $xy-1=0$은 각각 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, $y=\frac{1}{x}$의 음함수 표현이다.

01 음함수의 미분

소단원 지도 목표

① 음함수의 뜻을 알고, 음함수를 미분할 수 있게 한다.

② 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

③ 음함수의 미분법을 이용하여 이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 음함수의 미분법을 수학적으로 엄밀하게 다루는 것은 고등학교 수학의 수준을 넘는다. 따라서 간단한 경우에 대한 구체적인 예를 들어 직관적으로 다룬다.

새로 나온 용어와 기호

• 음함수(陰函數, implicit function)

생각 열기 참/고/자/료

7세기경의 신라 유물로 알려진 얼굴 무늬 수막새는 경주 영묘사지에서 출토된 기와에 사용된 수막새로 사람 얼굴을 하고 있는 유일한 유물로 발굴될 당시 온전한 원 모양이 아니었다.

원 모양의 테두리를 복원하기 위해서 '원의 중심'을 찾아야 하는데 먼저 남아 있는 수막새의 테두리에 적당하게 세 점 A, B, C를 잡고 연결해 삼각형을 그린다.

이때 두 점 A, B를 연결하는 선을 수직으로 이등분하는 선을 긋는다. 마찬가지로 두 점 B, C와 A, C를 연결하는 선을 수직으로 이등분하는 선을 그리면 이 선들은 한 점에서 만난다.

이 점은 '외심(外心)'이라고 불린다. 삼각형의 세 꼭짓점 A, B, C를 지나는 원, 즉 외접원의 중심이다. 이처럼 삼각형의 외심은 원의 일부만이 남아 있을 때 원의 모양을 완성하는데 이용될 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 원의 방정식 $x^2+y^2=1$이 함수인지 아닌지 판단하고, 이를 이용하여 음함수의 정의를 이해하게 하려는 것이다.

1. 원의 방정식 $x^2+y^2=1$은 구간 $(-1, 1)$에 속하는 임의의 x의 값에 대하여 대응되는 y의 값이 두 개이므로 **y는 x에 대한 함수가 아니다.**
2. **$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$**
3. y값의 범위를 $y\geq0$ 또는 $y\leq0$으로 정하면 **y는 x에 대한 함수가 된다.**

교과서 38 쪽

이제 음함수 $x^2+y^2-1=0$의 도함수인 $\frac{dy}{dx}$를 구하여 보자.

앞에서 살펴본 바와 같이 y를 x에 대하여 나타내면 y를 x에 대한 함수로 이해할 수 있다. 따라서 양변을 x에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(1)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$2x+\frac{d}{dy}(y^2)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}(0)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

이다.

이와 같이 x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하는 것을 음함수의 미분법이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

음함수의 미분법은 $f(x, y)=0$을 $y=f(x)$의 꼴로 고치기 어려운 함수를 미분할 때 유용하게 사용된다.

음함수의 미분법

x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어져 있을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후에 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

예제 01 음함수 $2x^2+3y^2=6$의 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이 y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(2x^2)+\frac{d}{dx}(3y^2)=\frac{d}{dx}(6)$$

$$4x+\frac{d}{dy}(3y^2)\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$4x+6y\frac{dy}{dx}=0$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3y}$ (단, $y\neq0$)

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3y}$ (단, $y\neq0$)

교과서 39 쪽

문제 1 다음 음함수의 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $x^2+xy+y^2=1$　　(2) $y^2=x^2+2y-5$

(3) $x^3+y^3=xy$　　(4) $x^2+3y^2=4xy$

음함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

예제 02 곡선 $x^2-2xy+2y^2=10$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(2xy)+\frac{d}{dx}(2y^2)=\frac{d}{dx}(10)$$

$$2x-\left(2y+2x\frac{dy}{dx}\right)+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(-2x+4y)\frac{dy}{dx}=-2x+2y$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq2y$)

점 $(2, -1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-(-1)}{2-2\times(-1)}=\frac{3}{4}$$

이므로 점 $(2, -1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{3}{4}(x-2) \text{ 즉, } y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$$

답 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$

문제 2 곡선 $x^2-\frac{x}{y}-2=0$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

발전 **문제 3** 곡선 $x^3+y^3+axy+b=0$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{5}{8}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

1

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+y+x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

따라서 $\mathbf{\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+3y^2}}$ **(단, $x+3y^2\neq0$)**

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=2x+2\frac{dy}{dx}$$

따라서 $\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y-1}}$ **(단, $y\neq1$)**

(3) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$$

따라서 $\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{x-3y^2}}$ **(단, $x-3y^2\neq0$)**

(4) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+6y\frac{dy}{dx}=4y+4x\frac{dy}{dx}$$

따라서 $\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y}{2x-3y}}$ **(단, $2x-3y\neq0$)**

2

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=0,\ 2xy^2-\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2xy^2}{x}\ (\text{단, } x\neq0)$$

따라서 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이므로

구하는 접선의 방정식은

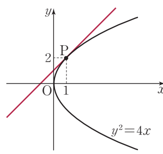
$y-1=-\frac{3}{2}(x-2)$, 즉 $\mathbf{y=-\frac{3}{2}x+4}$

교과서 40 쪽

이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 판별식을 이용하여 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.
2. 음함수의 미분법을 이용하여 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.
3. 1과 2의 결과를 비교하여 보자.

음함수의 미분법을 이용하여 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

포물선의 방정식 $y^2=4px$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2y\dfrac{dy}{dx}=4p$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

이다. 먼저 $y_1\neq0$일 때 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2p}{y_1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{2p}{y_1}(x-x_1)$$

$$y_1y-{y_1}^2=2p(x-x_1) \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$${y_1}^2=4px_1 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

이다.

한편 $y_1=0$일 때 접점이 $(0,\ 0)$이므로 접선의 방정식은 $x=0$이다. 따라서 접선의 방정식 $y_1y=2p(x+x_1)$은 이 경우에도 성립한다.

같은 방법으로 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

임을 알 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 포물선 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 판별식과 음함수의 미분법을 이용하여 각각 구하고, 그 결과를 비교하도록 한다.

1. 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식의 기울기를 m이라 하면

$y-2=m(x-1)$에서 $x=\dfrac{y-2+m}{m}$

이를 $y^2=4x$에 대입하여 정리하면

$my^2-4y+8-4m=0$

이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=2^2-m(8-4m)=0$에서

$(m-1)^2=0,\ m=\mathbf{1}$

2. $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=4,\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 **1**이다.

3. 서로 같다.

3

목표 | 음함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}+ay+ax\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+ay}{3y^2+ax}\ (\text{단, } 3y^2+ax\neq0)$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{5}{8}$이므로

$-\dfrac{3+2a}{12+a}=\dfrac{5}{8},\ a=\mathbf{-4}$

또 점 $(1,\ 2)$는 곡선 $x^3+y^3+axy+b=0$ 위의 점이므로

$1+8+2a+b=0$

따라서 $b=\mathbf{-1}$

지/도/자/료

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구하여 보자.

$y^2=4px$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=4p,\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}(\text{단, } y\neq0)$

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 이 점에서의 접선의 기울기가 m이므로

$\dfrac{2p}{y_1}=m$, 즉 $y_1=\dfrac{2p}{m}$ $\cdots\cdots①$

또 점 $(x_1,\ y_1)$이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

${y_1}^2=4px_1$ $\cdots\cdots②$

①을 ②에 대입하면 $x_1=\dfrac{p}{m^2},\ y_1=\dfrac{2p}{m}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\dfrac{2p}{m}=m\left(x-\dfrac{p}{m^2}\right)$, 즉 $y=mx+\dfrac{p}{m}$

이와 같은 방법으로 기울기가 주어진 타원과 쌍곡선의 접선의 방정식도 구할 수 있다.

교과서 41 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **포물선 위의 점에서의 접선의 방정식**

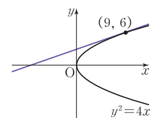
(1) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

(2) 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

예제 03 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9, 6)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.



풀이 포물선의 방정식 $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=4$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}\ (\text{단}, y\neq0)$$

점 $(9, 6)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-6=\frac{1}{3}(x-9)\ \text{즉}, y=\frac{1}{3}x+3$$

답 $y=\dfrac{1}{3}x+3$

다른 풀이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9, 6)$에서의 접선의 방정식이다.

따라서 $y^2=4x=4\times1\times x$이므로 $p=1$

$$6y=2\times1\times(x+9)\ \text{즉}, y=\frac{1}{3}x+3$$

문제 4 다음 주어진 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y^2=-8x$, $(-2, 4)$ (2) $x^2=9y$, $(-3, 1)$

음함수의 미분법을 이용하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\dfrac{dy}{dx}=0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\ (\text{단}, y\neq0)$$

이다.

본문 해설

❶ 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

$x_1\neq0$일 때, 접선의 기울기를 $m(m\neq0)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots①$$

한편 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots②$$

①과 ②는 같은 직선의 방정식이므로

$$-mx_1+y_1=\frac{p}{m}$$

$$m^2x_1-my_1+p=0$$

이때 $y_1^2=4px_1$이므로

$$m=\frac{y_1\pm\sqrt{y_1^2-4px_1}}{2x_1}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{2p}{y_1}$$

이것을 ①에 대입하면

$$y-y_1=\frac{2p}{y_1}(x-x_1)$$

$$y_1y=2p(x-x_1)+y_1^2$$

이 식에 $y_1^2=4px_1$을 대입하여 정리하면

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

또 이 식은 $x_1=0$, 즉 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이 원점일 때에도 성립한다.

같은 방법으로 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

임을 알 수 있다.

한편 앞으로 배울 타원과 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식도 이와 같은 방법으로 구할 수 있다.

4

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 포물선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=-8$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{y}$(단, $y\neq0$)

점 $(-2, 4)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{4}{4}=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-(x+2)$, 즉 $\boldsymbol{y=-x+2}$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=9\dfrac{dy}{dx}$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{9}x$

점 $(-3, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{6}{9}=-\dfrac{2}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-\dfrac{2}{3}(x+3)$, 즉 $\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{3}x-1}$

다른 풀이| (1) $y^2=-8x=4\times(-2)\times x$이므로 $p=-2$

$4y=2\times(-2)\times(x-2)$, 즉 $y=-x+2$

(2) $x^2=9y=4\times\dfrac{9}{4}\times y$이므로 $p=\dfrac{9}{4}$

$-3x=2\times\dfrac{9}{4}\times(y+1)$, 즉 $y=-\dfrac{2}{3}x-1$

교과서 42 쪽

먼저 $y_1\neq0$일 때 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 $P(x_1, y_1)$이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ②를 ①에 대입하면

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이다. 한편 $y_1=0$일 때 접점이 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이므로 접선의 방정식은 $x=a$, $x=-a$이다. 따라서 접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$은 이 경우에도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원 위의 점에서의 접선의 방정식

❶ 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

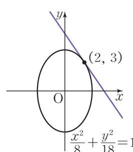
예제 04 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 타원의 방정식 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{x}{4}+\frac{y}{9}\frac{dy}{dx}=0$이므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$ (단, $y\neq0$)

점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-2) \text{ 즉, } y=-\frac{3}{2}x+6$$



답 $y=-\frac{3}{2}x+6$

지/도/자/료

이차곡선에서 접점이 주어진 경우에 접선의 방정식을 구할 때는, 다음을 공식처럼 사용하는 것이 편리하다.

즉, 이차곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 이차곡선의 방정식에

x^2 대신 ⇨ x_1x

y^2 대신 ⇨ y_1y

x 대신 ⇨ $\frac{x+x_1}{2}$

y 대신 ⇨ $\frac{y+y_1}{2}$

을 각각 대입하여 구한다.

본문 해설

❶ 판별식을 이용하여 접점이 주어진 타원의 접선의 방정식을 구하여 보자.

접점 (x_1, y_1)을 지나며 기울기가 m인 접선의 방정식

$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots ①$

을 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2m(y_1-mx_1)x +a^2(y_1-mx_1)^2-a^2b^2=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①은 점 (x_1, y_1)에서 타원에 접하므로 x_1은 방정식 ②의 중근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_1=2x_1=\frac{2a^2m(mx_1-y_1)}{a^2m^2+b^2}$$

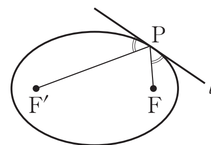
$b^2x_1=-a^2my_1$이므로 $\quad m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

이것을 ①에 대입하여 정리하면

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

읽/기/자/료 치과 치료기에서 찾은 타원

타원의 두 초점을 F, F′, 타원 위의 점 P에서의 접선을 l이라고 하면 선분 PF와 직선 l, 선분 PF′과 직선 l이 이루는 예각의 크기는 서로 같다.



이와 같은 타원의 성질을 이용한 것으로는 치과에서 환자를 치료할 때 사용하는 타원형 반사경이 있다.

반사경의 타원면의 한 초점에 놓인 전구에서 나온 빛은 반사경에 반사되어 다른 초점에 놓인 치료하려는 이에 모이게 된다.

5

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 타원 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{x}{4}+y\frac{dy}{dx}=0$이므로

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$ (단, $y\neq0$)

점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x+2)$, 즉 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+2}$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x+8y\frac{dy}{dx}=0$이므로

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$ (단, $y\neq0$)

점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{6}{-4}=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+1=\frac{3}{2}(x-2)$, 즉 $\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x-4}$

교과서 43 쪽

문제 5 다음 주어진 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$, $(-2,\ 1)$ (2) $3x^2+4y^2=16$, $(2,\ -1)$

창의 up

음함수의 미분법을 이용하여 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하는 방법을 설명하여라.

음함수의 미분법을 이용하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

이다. 먼저 $y_1\neq0$일 때 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2} \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 $P(x_1,\ y_1)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ②를 ①에 대입하면

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이다. 한편 $y_1=0$일 때 접점이 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$이므로 접선의 방정식은 $x=a$, $x=-a$이다. 따라서 접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$은 이 경우에도 성립한다.

다른 풀이| (1) $\frac{-2x}{8}+\frac{1\times y}{2}=1$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+2$

(2) $3\times2\times x+4\times(-1)\times y=16$, 즉 $y=\frac{3}{2}x-4$

창의 UP

출제 의도| 음함수의 미분법을 이용하여 원 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$이므로

$y_1\neq0$일 때 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ …… ①

또 점 P는 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$ …… ②

①, ②에 의하여 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

한편 $y_1=0$일 때 접선의 방정식은 $x=r$, $x=-r$이므로 이 경우에도 $x_1x+y_1y=r^2$과 같이 나타낼 수 있다.

지/도/자/료

곡선 밖의 점이 주어진 경우의 접선의 방정식을 구하는 방법

① 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓는다.

② 이 점에서의 접선의 방정식을 음함수의 미분법을 이용하여 구한다.

③ 이 접선의 방정식이 주어진 점을 지나고 점 $(x_1,\ y_1)$이 곡선 위의 점임을 이용하여 x_1, y_1의 값을 구한 후 접선의 방정식을 구한다.

이때 곡선 밖의 점에서 그은 접선은 두 개임을 유의한다.

같은 방법으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

예제 05 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$의 양변을 x에 대하여

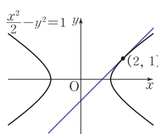
미분하면 $x-2y\frac{dy}{dx}=0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{2}=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=x-2 \text{ 즉, } y=x-1$$



답 $y=x-1$

문제 6 다음 주어진 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$, $(-2, -1)$ (2) $x^2-2y^2=-1$, $(1, 1)$

6

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\frac{dy}{dx}=0$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$(단, $y\neq0$)

점 $(-2, -1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{-2}{-1}=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+1=2(x+2)$, 즉 $\boldsymbol{y=2x+3}$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-4y\frac{dy}{dx}=0$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$(단, $y\neq0$)

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$, 즉 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

다른 풀이| (1) $\frac{-2x}{3}-\frac{-y}{3}=1$, 즉

$y=2x+3$

(2) $1\times x-2\times1\times y=-1$, 즉

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

지/도/자/료

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 여러 가지 성질

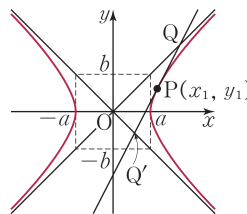
(1) 쌍곡선 위의 임의의 점에서 두 점근선에 각각 내린 두 수선의 길이의 곱은 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$으로 일정하다.

(2) 임의의 접선과 두 점근선으로 만들어지는 삼각형의 넓이는 $|ab|$로 일정하다.

(3) 초점에서 임의의 접선에 내린 수선의 발은 원 $x^2+y^2=a^2$ 위에 있다.

(4) 두 초점을 공유하는 타원과 쌍곡선은 서로 직교한다. 즉, 교점에서의 두 접선의 기울기의 곱은 -1이다.

(5) 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 그은 접선이 점근선과 만나는 점을 각각 Q, Q′이라고 하면 점 P는 선분 QQ′의 중점이다.



02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

소단원 지도 목표

① 매개변수의 뜻을 알게 한다.
② 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있게 한다.
③ 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 매개변수는 몇 개의 변수 사이의 함수 관계를 정하기 위하여 사용되는 또 하나의 변수이다. 예를 들어 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 t를 소거한 식을 만들면 t를 매개로 하여 x와 y의 함수 관계가 정해짐을 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 매개변수(媒介變數, parameter)

교과서 45 쪽

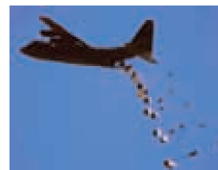
02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

● 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

매개변수로 나타낸 함수의 도함수는 어떻게 구하는가?

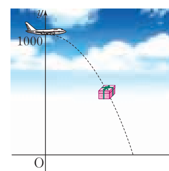
생각 열기 **재해 구호물자**

행정안전부와 소방방재청은 2011년 일본 동북부 대지진 사례를 거울 삼아 해일, 집중 호우, 폭설, 지진 등 대규모 자연재해로 이재민 발생 시 재해 구호물자의 신속한 지원을 위해 '재해 구호물자 통합 정보 시스템' 구축 시범 사업을 완료하였다.



탐구 활동

오른쪽 그림은 재난 지역에 구호물자를 떨어뜨리는 모습을 그래프로 나타낸 것이다. 구호물자는 포물선을 그리며 떨어지고, 떨어뜨리고 나서 시각 t에서의 위치는 $x=50t$, $y=-5t^2+1000$이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.



1. $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 구하여 보자.
2. y를 x에 대한 식으로 나타내어 $\frac{dy}{dx}$를 구하여 보자.
3. $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$와 $\frac{dy}{dx}$를 비교하여 보자.

탐구 활동에서와 같이 두 변수 x, y의 함수 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x=f(t),\ y=g(t) \qquad \cdots\cdots ①$$

와 같이 나타날 때 변수 t를 **매개변수**라 하고, ①을 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

● 매개변수는 영어로 parameter라고 한다.

생각 열기 참/고/자/료

일본 동북부 대지진 사례를 거울 삼아 해일, 집중 호우, 폭설, 지진 등 대규모 자연재해로 이재민 발생 시 재해 구호물자의 신속한 지원을 위해 2011년 유비쿼터스 지원 사업으로 전국 재해 구호 협회, 기초 자치 단체 등과 협력하여 '재해 구호물자 통합 정보 시스템' 구축 시범 사업을 완료하였다. 본 사업은 재해 구호물자에 RFID 태그를 부착하여 물자 생산, 접수, 운송, 배분 등 비축 및 유통 과정을 실시간 관리하여 재해 구호물자가 필요한 지역에 적기 공급하고자 하는 사업이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 매개변수 t로 나타낸 함수를 매개변수를 소거하여 $y=f(x)$ 꼴로 나타낸 다음 $\frac{dy}{dx}$를 구한 식과 $\frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$가 같음을 비교하여 이들 간의 관계를 이해하게 하려는 것이다.

1. $\frac{dx}{dt}=50$, $\frac{dy}{dt}=-10t$

2. $t=\frac{x}{50}$이므로 $y=-\frac{x^2}{500}+1000$

따라서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{250}$

3. $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-10t}{50}=-\frac{t}{5}=-\frac{1}{5}\times\frac{x}{50}=-\frac{x}{250}$이므로

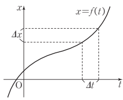
서로 같다.

본문 해설

❶ 두 변수 x, y가 모두 매개변수 t로 나타내어진 경우, $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 $f(t)$, $g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq0$이면 $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$가 성립한다.

교과서 46 쪽

매개변수 t로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때, $\frac{dy}{dx}$를 구하여 보자.



함수 $x=f(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면, 함수 $x=f(t)$의 역함수가 존재하고 그 역함수는 연속이다. 따라서 매개변수 t의 증분 Δt에 대한 x의 증분을 Δx라고 하면, Δx가 한없이 0에 가까워질 때 Δt도 한없이 0에 가까워진다.

이때 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$=\frac{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

1 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

예제 01 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=3t-1$, $y=-2t^3+5$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 t의 식으로 나타내어라.

풀이 $x=3t-1$에서 $\frac{dx}{dt}=3$

$y=-2t^3+5$에서 $\frac{dy}{dt}=-6t^2$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-6t^2}{3}=-2t^2$이다.

답 $\frac{dy}{dx}=-2t^2$

교과서 47 쪽

문제 1 매개변수 t로 나타낸 다음 함수에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 t의 식으로 나타내어라.

(1) $x=2t+3$, $y=t^4+t^2$ (2) $x=t^2+t$, $y=t^3$

(3) $x=\frac{2}{3}t^3+t$, $y=t^3-t^2+2$ (4) $x=t^2+3$, $y=4t^3-\frac{1}{t}$

창의 UP

반지름의 길이가 4인 구 모양의 비눗방울이 있다. 이 비눗방울의 반지름이 매초 0.2씩 커진다고 할 때, 비눗방울이 커지기 시작한 지 t초 후의 반지름의 길이와 부피를 각각 $r(t)$, $V(t)$라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) $r(t)$, $V(t)$를 구하여라.

(2) 비눗방울이 커지기 시작한 지 5초 후의 반지름의 길이에 대한 부피의 순간변화율 $\frac{dV}{dr}$를 구하여라.



매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

예제 02 매개변수 t로 나타낸 함수

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}$$

에 대하여 $t=1$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$

$y=\frac{2t}{1+t^2}$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2(1-t^2)}{-4t}=\frac{1-t^2}{-2t}$이므로 $t=1$일 때 접선의 기울기는 0이다.

$t=1$일 때, $x=0$, $y=1$을 지나므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=0\times(x-0)$ 즉, $y=1$

답 $y=1$

이때 이용되는 성질은 다음과 같다.

(1) $\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{dy}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$

(2) 미분가능한 함수 $x=f(t)$는 연속이므로

$\Delta t\to 0 \Longleftrightarrow \Delta x\to 0$

(3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$

(4) $\lim_{\Delta t\to 0}F(t)=A$, $\lim_{\Delta t\to 0}G(t)=B$이면

$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\frac{A}{B}$(단, $B\neq 0$)

1

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 t의 식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=4t^3+2t$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{4t^3+2t}{2}=\mathbf{2t^3+t}$

(2) $\frac{dx}{dt}=2t+1$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$에서 $\frac{dy}{dx}=\mathbf{\frac{3t^2}{2t+1}}$

(3) $\frac{dx}{dt}=2t^2+1$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-2t$에서 $\frac{dy}{dx}=\mathbf{\frac{3t^2-2t}{2t^2+1}}$

(4) $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=12t^2+\frac{1}{t^2}$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{12t^2+\frac{1}{t^2}}{2t}=\mathbf{\frac{12t^4+1}{2t^3}}$

창의 UP

출제 의도| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{r(t)=4+0.2t}$, $\mathbf{V(t)=\frac{4}{3}\pi(4+0.2t)^3}$

(2) $\dfrac{dr}{dt}=0.2,\ \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{4}{5}\pi(4+0.2t)^2$

$\dfrac{dV}{dr}=4\pi(4+0.2t)^2$에서 $t=5$일 때의 값은 **100π**이다.

2

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{dt}=2t+\dfrac{1}{t^2},\ \dfrac{dy}{dt}=1+\dfrac{2}{t^3}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\dfrac{2}{t^3}}{2t+\dfrac{1}{t^2}}=\dfrac{t^3+2}{2t^4+t}$이므로

$t=-1$일 때 접선의 기울기는 $\dfrac{-1+2}{2-1}=1$

따라서 $t=-1$일 때, $x=2,\ y=-2$를 지나므로 구하는 접선의 방정식은

$y+2=x-2$, 즉 $\boldsymbol{y=x-4}$

3

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{dt}=2t-4,\ \dfrac{dy}{dt}=3t^2-4t-a$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2-4t-a}{2t-4}$이고, $t=1$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $\dfrac{-1-a}{-2}=4$에서 $a=\mathbf{7}$

창의 UP

출제 의도| 타원과 쌍곡선의 방정식을 매개변수로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 타원: $\dfrac{x^2}{a^2}=\cos^2\theta,\ \dfrac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$로 놓으면

$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$

쌍곡선: $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{1}{\cos^2\theta},\ \dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$로 놓으면

$x=\dfrac{a}{\cos\theta},\ y=b\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

교과서 48 쪽

문제 **2** 매개변수 t로 나타낸 함수

$$x=t^2-\frac{1}{t},\ y=t-\frac{1}{t^2}$$

에 대하여 $t=-1$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

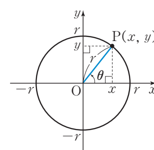
문제 **3** 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^2-4t+1,\ y=t^3-2t^2-at$에 대하여 $t=1$에서의 접선의 기울기가 4이다. 이때 상수 a의 값을 구하여라.

창의 UP

원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$을 매개변수 θ로 나타내면

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

로 표현할 수 있다. 이 방법을 이용하여 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 매개변수 θ로 나타내는 방법을 설명하여라.



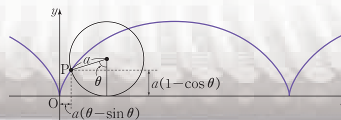
단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

좌표평면의 x축 위를 구르는 원의 반지름의 길이를 a라고 할 때, 사이클로이드 곡선 위의 점 P의 x좌표와 y좌표는 매개변수 θ로 나타낸 함수

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$$

로 나타낼 수 있다. $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여라.



단원 과제

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),\ \dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 접선의 기울기는 $\sqrt{3}$이고 $x=a\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\dfrac{a}{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$\boldsymbol{y=\sqrt{3}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a+2a}$

교과서 49 쪽

중단원 기초

[해답 p.206]

수준별 학습

1 음함수 $3x^2-5y^2=1$의 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라. — 01 음함수의 미분

2 포물선 $x^2=-4y$ 위의 점 $(4\sqrt{2},\ -8)$에서의 접선의 기울기를 구하여라. — 01 음함수의 미분 / 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

3 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(2,\ -\sqrt{6})$에서의 접선의 방정식을 구하여라. — 01 음함수의 미분 / 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

4 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라. — 01 음함수의 미분 / 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

5 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^4$, $y=t^3+t^2+1$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타내어라. — 02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

6 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^5+2t^2+6$, $y=t^2+t+3$에 대하여 $t=-1$에서의 접선의 방정식을 구하여라. — 02 매개변수로 나타낸 함수의 미분 / 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식

중/단/원 기초

1

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x-10y\frac{dy}{dx}=0$이므로 $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{3x}{5y}}$ **(단, $y\neq0$)**

2

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 포물선 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=-4\frac{dy}{dx}$이므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}x$

따라서 점 $(4\sqrt{2},\ -8)$에서 접선의 기울기는

$-\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$

3

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 타원 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(2,\ -\sqrt{6})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{8}+\frac{-\sqrt{6}y}{12}=1$, 즉

$\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{6}}{2}x-2\sqrt{6}}$

4

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x-3y=6$, 즉 $\boldsymbol{y=x-2}$

5

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=4t^3$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+2t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2t}{4t^3}=\boldsymbol{\frac{3t+2}{4t^2}}$

6

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=5t^4+4t$, $\frac{dy}{dt}=2t+1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+1}{5t^4+4t}$이므로 $t=-1$일 때 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 $t=-1$일 때, $x=7$, $y=3$을 지나므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-(x-7)$, 즉 $\boldsymbol{y=-x+10}$

중/단/원 기본

1

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+2y}$이므로

$-\frac{-6}{-3a}=3$에서 $a=-\frac{2}{3}$

한편 점 $(-3, 0)$은 곡선 위의 점이므로

$9+b=0$, $b=-9$

따라서 $ab=\mathbf{6}$

2

목표| 포물선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=x+3$과 최단 거리에 있는 포물선 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라고 하면

$y_1{}^2=4x_1$

이때 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식

$y=\frac{2}{y_1}x+\frac{2x_1}{y_1}$의 기울기는 1이므로 $y_1=2$

따라서 점 $(1, 2)$와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리는 $\frac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{\mathbf{2}}$

중단원 기본

[해답 p.206] 수준별 학습

1 곡선 $x^2+axy+y^2+b=0$ 위의 점 $(-3, 0)$에서 $\frac{dy}{dx}$의 값이 3일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라.

01 음함수의 미분

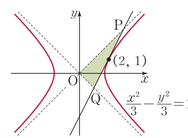
2 포물선 $y^2=4x$ 위의 점과 직선 $y=x+3$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

01 음함수의 미분 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

3 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

01 음함수의 미분 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

4 오른쪽 그림과 같은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선과 이 쌍곡선의 점근선과의 두 교점을 P, Q라고 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 구하여라.



01 음함수의 미분 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

5 타원 $2x^2+y^2=10$과 쌍곡선 $x^2-4y^2=-4$의 한 교점을 P라고 하자. 점 P에서의 타원과 쌍곡선의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 할 때, m_1m_2의 값을 구하여라.

01 음함수의 미분 타원과 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

6 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=2t-1$, $y=t^2+1$에 대하여 $y=f(x)$로 나타내었을 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$의 값을 구하여라.

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

3

목표| 타원 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$이므로 $-\frac{-2b^2}{3a^2}=2$에서 $b^2=3a^2$

또 점 $(-2, 3)$이 타원 위의 점이므로 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$

$a^2=7$, $b^2=21$이므로 $a^2+b^2=\mathbf{28}$

4

목표| 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x-3$

이 접선과 점근선의 방정식 $y=x$, $y=-x$와의 교점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(3, 3)$, $\mathrm{Q}(1, -1)$이다.

따라서 삼각형 OQP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=\mathbf{3}$

5

목표| 타원과 쌍곡선 위의 한 점에서의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 교점 P의 좌표를 (a, b)라 하고 이 점에서의 기울기를 각각 구하면 $m_1=\frac{-2a}{b}$, $m_2=\frac{a}{4b}$

또 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 두 곡선 위의 점이므로

$2a^2+b^2=10$, $a^2-4b^2=-4$에서 $a^2=4$, $b^2=2$

따라서 $m_1m_2=\frac{-2a^2}{4b^2}=\frac{-8}{8}=\mathbf{-1}$

6

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로 $\frac{dy}{dx}=t$

$x=2t-1$에서 $x=2$로 놓으면 $t=\frac{3}{2}$이므로 $f'(2)=\frac{3}{2}$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}=2f'(2)=2\times\frac{3}{2}=\mathbf{3}$

교과서 51 쪽

중단원 실력

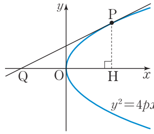
[해답 p.207]

수준별 학습

1 곡선 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2+1$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식이 $y=x+3$이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

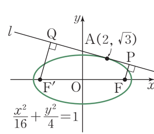
01 음함수의 미분
곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

2 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 P에서의 접선과 x축과의 교점을 Q라고 할 때, $\frac{\overline{QO}}{\overline{OH}}$의 값을 구하여라.



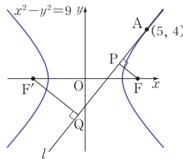
01 음함수의 미분
포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

3 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $A(2, \sqrt{3})$에서의 접선을 l이라 하고, 이 타원의 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자. 이때 $\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}$의 값을 구하여라.



01 음함수의 미분
타원 위의 점에서의 접선의 방정식

4 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=9$ 위의 점 $A(5, 4)$에서의 접선을 l이라 하고, 이 쌍곡선의 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자. 이때 $\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}$의 값을 구하여라.



01 음함수의 미분
쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

5 매개변수 t $(t\geq1)$로 나타낸 함수 $x=4t-2$, $y=t^3+2t^2-3t$에 대하여 $y=f(x)$로 나타내었을 때, $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값을 구하여라.

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

중/단/원 실력

1

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2y-y+b}{x^3+x-a}$이므로

$\frac{-8+b}{-2-a}=1$에서 $a+b=6$ …… ①

한편 점 $(-1, 2)$는 곡선 위의 점이므로

$2a-b=-4$ …… ②

①, ②에서 $\mathbf{a=\frac{2}{3}}$, $\mathbf{b=\frac{16}{3}}$

2

목표| 포물선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$이므로 포물선 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{2p}{b}x-\frac{2pa-b^2}{b}=\frac{2p}{b}x+\frac{2pa}{b}$

점 Q의 x좌표는 접선의 방정식의 x절편과 같으므로

$0=\frac{2p}{b}x+\frac{2pa}{b}$이고 $x=-a$

$\overline{OH}$는 점 P의 x좌표이므로 $\overline{OH}=a$이고

$\overline{QO}=|-a|$이므로 $\frac{\overline{QO}}{\overline{OH}}=\frac{a}{a}=\mathbf{1}$

3

목표| 타원 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 접선 l의 방정식은

$\frac{2x}{16}+\frac{\sqrt{3}y}{4}=1$, $x+2\sqrt{3}y-8=0$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$F(2\sqrt{3}, 0)$, $F'(-2\sqrt{3}, 0)$이므로

$\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}=\frac{|2\sqrt{3}-8|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}}\cdot\frac{|-2\sqrt{3}-8|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}}=\mathbf{4}$

4

목표| 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 접선 l의 방정식은 $5x-4y=9$, $5x-4y-9=0$

주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$F(3\sqrt{2}, 0)$, $F'(-3\sqrt{2}, 0)$이므로

$\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}=\frac{|15\sqrt{2}-9|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}\cdot\frac{|-15\sqrt{2}-9|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\mathbf{9}$

5

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+4t-3}{4}$

$t=1$일 때 $x=2$, $y=0$이므로 $f(2)=0$, $g(0)=2$

따라서 $g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(2)}$이다.

이때 $f'(2)$는 $x=2$, 즉 $t=1$일 때 $f'(x)$의 값이므로

$f'(2)=\frac{3+4-3}{4}=1$, $g'(0)=\frac{1}{f'(2)}=\mathbf{1}$

교과서 52 쪽

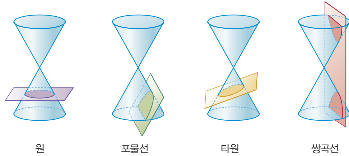
수행 과제

이차곡선(원뿔곡선)

일반적으로 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식은 모두 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

의 특수한 경우이다. 만일 이 방정식의 좌변이 두 일차식의 곱으로 나타내어지면 이 이차방정식은 두 직선의 방정식이 곱해져 있는 것을 나타낸다. 따라서 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식이 나타내는 곡선을 통틀어 이차곡선이라고 한다. 그런데 이차곡선은 다음 그림과 같이 마주보는 두 원뿔을 평면으로 자를 때, 자르는 각도에 따라 그 단면에 나타나는 곡선이기도 하다. 그래서 이차곡선을 원뿔곡선이라고도 한다.



| 과 제 | 1 포물선은 축에 평행하게 들어온 빛이나 소리를 초점으로 반사하여 모으고 반대로 초점에서 나오는 빛이나 소리를 축에 평행하게 반사하는 성질이 있다. 이 성질을 실생활에 활용한 예를 찾아보자.

| 과 제 | 2 타원은 한 초점에서 빛을 쏘았을 때 타원에 반사된 빛이 다른 한 초점으로 모이는 성질이 있다. 이 성질을 실생활에 활용한 예를 찾아보자.

교과서 53 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 이차곡선

포물선의 방정식

(1) 초점이 $F(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은
$$y^2=4px \ (단,\ p\neq0)$$
(2) 초점이 $F(0, p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은
$$x^2=4py \ (단,\ p\neq0)$$

타원의 방정식

(1) 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식은
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (단,\ b^2=a^2-c^2)$$
(2) 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$로부터의 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식은
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (단,\ a^2=b^2-c^2)$$

쌍곡선의 방정식

(1) 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식은
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (단,\ b^2=c^2-a^2)$$
(2) 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식은
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ (단,\ a^2=c^2-b^2)$$

쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은
$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

2 평면 곡선의 접선

음함수의 미분법

x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어져 있을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후에 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$$y_1y=2p(x+x_1)$$
(2) 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$$x_1x=2p(y+y_1)$$

타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$
(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수 t로 나타낸 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능할 때
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \ (단,\ f'(t)\neq0)$$

용어와 기호 포물선(초점, 준선, 축, 꼭짓점), 타원(초점, 꼭짓점, 장축, 단축, 중심), 쌍곡선(초점, 꼭짓점, 주축, 중심, 점근선), 이차곡선, 음함수, 매개변수

수행 과제

● 수행 과제 의도

포물선과 타원의 성질이 실생활에서 어떻게 활용되는지 알아보게 한다.

과제 1 _풀이

포물면(포물선을 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 면)의 초점에서 나온 빛은 축에 평행한 방향으로 직진하는데 탐조등이나 자동차 전조등은 포물면 거울의 초점의 위치에 전구가 있어 포물면에 반사된 빛이 모두 축에 평행한 방향으로 직진하게 되므로 멀리까지 밝게 비출 수 있다. 위와 반대의 성질로 포물면의 축에 평행한 빛이나 전파는 포물면에 반사되어 초점에 모이는 성질을 활용할 수도 있다. 숲 속의 새소리나 야구장의 장내음을 듣기 위해 사용하는 집음기는 포물면 모양을 하고 있고 초점의 위치에 마이크로폰이 있기 때문에 효과적으로 소리를 모을 수 있다. 위성 안테나나 스탠드의 갓도 포물선의 성질을 활용한 것이다.

과제 2 _풀이

타원의 광학적 성질은 우리의 생명을 다루는 의료 분야에서 아주 요긴하게 사용되고 있다. 그 예로는 신장 결석 등의 치료에 이용되는 결석 제거 장치이다. 먼저 컴퓨터로 정확히 측정해서 타원의 한 초점에 발사기를 다른 한 초점에 치료할 부위가 가도록 타원형의 공간에 환자를 눕힌다. 그 후 초음파를 발사하게 되면, 만일 실수로 발사하는 기계를 건드려 움직인다 하여도 한 초점에서 발사되는 것이 타원의 반사경에서 반사되므로 반드시 안전하게 환부에 입사되는 것이다.

뿐만 아니라 타원 곡선 암호를 이용하여 PDA 기반의 신용카드 결제 프로토콜을 설계하거나, 행성은 타원궤도의 법칙에 따라 운동하므로 행성의 위치를 추적할 경우에도 사용된다.

대 / 단 / 원 평가 문제

선택형

1 점 A(8, 4)를 지나고 x축에 평행한 직선과 포물선 $y^2=8x$의 교점을 P, 이 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{AP}+\overline{PF}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$의 초점을 F, 이 포물선 위의 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 삼각형 PFH가 정삼각형일 때, 삼각형 PFH의 둘레의 길이는?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

3 두 타원 $2x^2+3y^2-4x-6y-1=0$과 $3x^2+4y^2-6x-8y-a=0$의 초점이 일치할 때, 상수 a의 값은? (단, $a\neq-7$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4 오른쪽 그림과 같이 중심이 O인 원의 내부에서 중심 O가 아닌 정점 A를 지나면서 원에 내접하는 원의 중심을 P라고 할 때, 점 P의 자취는?

① 선분 ② 원 ③ 포물선 ④ 타원 ⑤ 쌍곡선

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$의 한 초점의 좌표가 $(10,\ 0)$이고 한 점근선의 기울기가 $\frac{3}{4}$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라고 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 PFF′의 둘레의 길이가 14일 때, $|\overline{PF}^2-\overline{PF'}^2|$의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

7 음함수 $2x^2+3y^2=6$에서 $\frac{dy}{dx}$는?

① $-\frac{3x}{2y}$ ② $\frac{3x}{2y}$ ③ $-\frac{2x}{3y}$ ④ $\frac{2x}{3y}$ ⑤ $-\frac{3x}{4y}$

8 포물선 $y^2=24x$ 위의 점 $\left(\frac{a^2}{24},\ a\right)$에서 접선의 기울기가 자연수가 되도록 하는 0이 아닌 정수 a의 개수는?

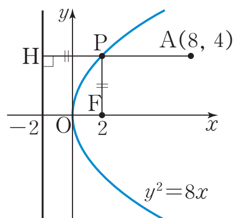
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표| 포물선의 초점과 준선의 방정식을 구하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $y^2=8x$에서 초점 F의 좌표는 F(2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



$\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}$

$=\overline{AH}$

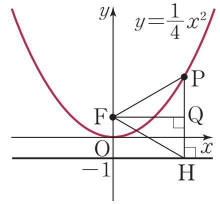
$=8-(-2)=10$

답 ⑤

2

목표| 포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2=4y$에서 초점 F의 좌표는 F(0, 1)이고, 준선의 방정식은 $y=-1$이다.



△PFH가 정삼각형이므로 점 Q는 $\overline{PH}$를 수직이등분한다.

이때 $\overline{QH}=2$이므로

$\overline{PH}=2\overline{QH}=4$

따라서 삼각형 PFH의 둘레의 길이는

$4\times3=12$

답 ③

3

목표| 주어진 방정식을 변형하여 타원의 초점을 구할 수 있게 한다.

풀이| $2x^2+3y^2-4x-6y-1=0$을 변형하면

$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$ ……①

또 $3x^2+4y^2-6x-8y-a=0$을 변형하면

$\frac{3(x-1)^2}{a+7}+\frac{4(y-1)^2}{a+7}=1$ ……②

두 타원 ①, ②의 초점이 일치하므로 두 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$, $\frac{3x^2}{a+7}+\frac{4y^2}{a+7}=1$의 초점도 일치한다.

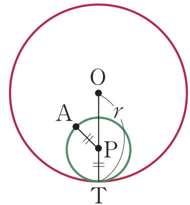
$\frac{a+7}{12}=1$에서 $a=5$

답 ④

4

목표| 타원의 정의를 이해하게 한다.

풀이| 오른쪽 그림에서 원 O의 반지름의 길이를 r, 접점을 T라고 하면



$\overline{AP}=\overline{PT}$이므로 $\overline{AP}+\overline{PO}=\overline{OT}=r$

따라서 두 정점 A, O에서 점 P까지의 거리의 합이 일정하므로 점 P의 자취는 두 점 A, O를 초점으로 하는 타원이다.

답 ④

5

목표| 쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 한 초점의 좌표가 (10, 0)이므로

$a^2+b^2=10^2=100$ ……①

또 한 점근선의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$에서 $b=\frac{3}{4}a$ ……②

①, ②에서 $a=8$, $b=6$

따라서 $a+b=14$

답 ①

6

목표| 쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는
$\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF}'}=6$
쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 PFF'의 둘레의 길이가 14이므로
$\overline{\mathrm{PF}}=a$, $\overline{\mathrm{PF}'}=b$라고 하면
$a+b+6=14$에서 $a+b=8$
또 쌍곡선의 정의에 의하여
$|a-b|=4$에서 $a-b=\pm 4$
따라서 $|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF}'}^2|=|a^2-b^2|=32$ 답 ②

7

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변을 x에 대하여 미분하면
$4x+6y\dfrac{dy}{dx}=0$에서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{3y}$ 답 ③

교과서 55 쪽

[해답 p.207]

9 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 x축과의 교점의 좌표가 $(4,\ 0)$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $b>0$)

① $\dfrac{52}{9}$ ② 7 ③ $\dfrac{26}{3}$
④ $\dfrac{28}{3}$ ⑤ 10

10 매개변수로 나타낸 함수

$$x=2\sqrt{t}+1,\ y=\frac{2t}{t-1}-\frac{1}{t}$$

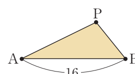
에 대하여 $t=2$에서의 접선의 기울기는?

① $-\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ ② $-\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$
④ $\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$

서답형

11 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점과 이 포물선의 초점을 연결하는 선분의 중점의 자취를 나타내는 방정식을 구하여라.

12 다음 그림과 같이 두 정점 A, B와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=20$을 만족시키며 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=16$일 때, 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하여라.

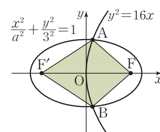


13 음함수 $x^3+y^3+x+y-3=0$의 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

14 매개변수로 나타낸 함수 $x=\cos^3\theta$, $y=2\sin^3\theta$에 대하여 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1\ (a>3)$의 두 초점 중 한 초점이 포물선 $y^2=16x$의 초점과 일치한다고 한다. 이 두 곡선의 교점을 A, B라 하고, 타원의 두 초점을 F, F′이라고 할 때, 사각형 AF′BF의 둘레의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서|술|형|

16 함수 $\dfrac{\pi}{2}x=y+\sin(xy)$로 주어지는 그래프 위의 점 $(2,\ \pi)$에서 접선의 기울기를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

8

목표| 포물선 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 포물선 $y^2=24x$ 위의 점 $\left(\dfrac{a^2}{24},\ a\right)$에서 접선의 방정식은 $ay=2\times 6\left(x+\dfrac{a^2}{24}\right)$에서 $y=\dfrac{12}{a}x+\dfrac{a}{2}$
따라서 접선의 기울기는 $\dfrac{12}{a}$이고 이것이 자연수가 되려면 정수 a는 12의 양의 약수이어야 하므로
1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개이다. 답 ③

9

목표| 타원 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{ax}{12}+\dfrac{by}{4}=1$
이 접선이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로 $\dfrac{a}{3}=1$에서 $a=3$
한편 점$(a,\ b)$가 곡선 위의 점이므로
$\dfrac{a^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}=1$
$a=3$을 위의 식에 대입하면 $b>0$이므로 $b=1$
따라서 $a^2+b^2=10$ 답 ⑤

10

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-t^2-2t+1}{\{t(t-1)\}^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{-t^2-2t+1}{\{t(t-1)\}^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{t}}}=\frac{\sqrt{t}(-t^2-2t+1)}{\{t(t-1)\}^2}$$

따라서 $t=2$일 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}(-4-4+1)}{4}=-\frac{7\sqrt{2}}{4}$$ 답 ②

11

목표| 포물선의 초점을 구하여 주어진 조건을 만족시키는 자취의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 포물선 위의 한 점을 (p, q)라고 하면

$q^2=4p$ ……①

초점의 좌표가 $(1, 0)$이므로 두 점 (p, q), $(1, 0)$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}\right)$이다.

$x=\frac{p+1}{2}$, $y=\frac{q}{2}$에서

$p=2x-1$, $q=2y$ ……②

②를 ①에 대입하여 정리하면

$y^2=2x-1$ 답 $y^2=2x-1$

12

목표| 타원의 정의를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 자취는 두 정점 A, B를 초점으로 하고 $\overline{AP}+\overline{BP}=20$인 타원이 된다. 이때 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면

$2a=20$에서 $a=10$

한편 $\overline{AB}=16$이므로

$b^2=10^2-8^2=36$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 점 P가 $(6, 0)$일 때이므로 $\frac{1}{2}\times16\times6=48$ 답 48

13

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}+1+\frac{dy}{dx}=0$이므로

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+1}{3y^2+1}$ (단, $3y^2+1\neq0$)

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+1}{3y^2+1}$ (단, $3y^2+1\neq0$)

14

목표| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=6\sin^2\theta\cos\theta$

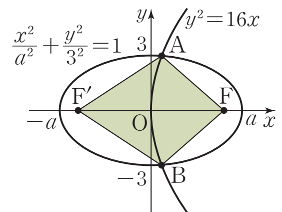
$\frac{dy}{dx}=\frac{6\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{-2\sin\theta}{\cos\theta}=-2\tan\theta$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{dy}{dx}=-2\tan\frac{\pi}{4}=-2$ 답 -2

15

목표| 타원과 포물선의 정의를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $y^2=16x$의 초점의 좌표는 $(4, 0)$이고 이 점이 타원의 초점이므로



$a^2-3^2=4^2$, $a=5$

따라서 장축의 길이는 $2a=10$이므로 사각형 AF′BF의 둘레의 길이는

$(\overline{AF'}+\overline{AF})+(\overline{BF'}+\overline{BF})=10+10=20$ 답 20

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	포물선의 초점의 좌표 구하기	20%
	a의 값 구하기	30%
	장축의 길이 구하기	20%
답 구하기	사각형 AF′BF의 둘레의 길이 구하기	30%

16

목표| 음함수의 미분법을 이용하여 그래프 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{\pi}{2}=\frac{dy}{dx}+\cos(xy)\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$

$x=2$, $y=\pi$를 대입하면

$\frac{\pi}{2}=\frac{dy}{dx}+\cos2\pi\cdot\left(\pi+2\frac{dy}{dx}\right)$

따라서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\pi}{6}$ 답 $-\frac{\pi}{6}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	양변을 x에 대하여 미분하기	40%
	$x=2$, $y=\pi$를 대입하기	30%
답 구하기	접선의 기울기 구하기	30%

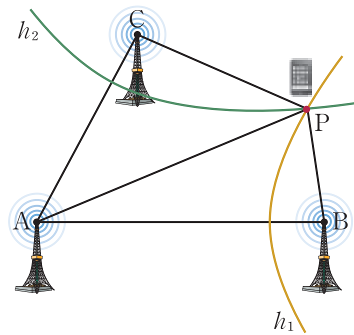
교과서 56 쪽

M+ Science

수 학 ✚ 과 학

생활 속의 쌍곡선

이차곡선 중 쌍곡선은 우리의 일상생활 속에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 제2차 세계 대전 중에 군함의 위치를 파악하기 위해 쌍곡선을 이용한 항법 장치를 사용하였는데, 이 원리가 현재에 이르러 휴대전화를 이용한 위치 추적에 활용되고 있다.



예를 들어 서비스 기지국 A와 인접 기지국 B에서 동시에 보낸 신호가 휴대전화 P에 도착하는 시간의 차이가 d_1임을 이용하여 휴대전화가 쌍곡선 h_1 위에 있음을 알았다고 하자. 서비스 기지국 A와 다른 인접 기지국 C에서 동시에 보낸 신호가 휴대전화 P에 도착하는 시간의 차이가 d_2임을 이용하여 휴대전화가 쌍곡선 h_2 위에 있음만 알면 두 쌍곡선 h_1과 h_2의 교점으로 휴대전화 P의 위치를 알아낼 수 있다.





2008년에 개봉한 영화 〈지구가 멈추는 날 (THE DAY THE EARTH STOOD STILL)〉에서도 쌍곡선을 찾아볼 수 있다.

이 영화는 지구의 종말을 다루었는데, 미확인 비행 물체가 지구를 향해 곧장 돌진하는 것으로 시작한다. 목성 궤도에서 처음 발견된 '물체 07/493' 이 초속 3만 km의 속도로 궤도를 따라 태양계를 통과하고 있으며, 지구와 멀리 떨어져 지나갈 것이라 예상했지만 중력과 상관없이 움직여 지구 맨해튼에 78분 후 떨어진다는 것이다. 그런데 지구와 충돌할 것이라 여겨졌던 '물체 07/493' 은 속력을 줄여 지구에 착륙한다. 그리고 지구에 착륙한 '물체 07/493' 에서는 인간과 똑같이 생긴 외계인 클라투가 내린다.

이 영화에서 클라투가 타고 온 우주선인 '물체 07/493' 이 쌍곡선 궤도를 따라 태양계를 통과하였다는 말이 나온다. 쌍곡선은 실제로 천문학에서 자주 찾아볼 수 있는데, 영화에서 등장하는 우주선처럼 쌍곡선 궤도로 움직이는 천체가 있다. 그중 대표적인 천체인 혜성은 보통 포물선, 타원, 쌍곡선과 같은 이차곡선 모양의 궤도를 그린다. 이 중 태양계 주변으로 다시 돌아오지 않는 혜성이 쌍곡선 궤도를 그리는 것으로 알려져 있다.

〈출처: 네이버 영화(http://movie.naver.com/movie)〉

수 학 + 과 학

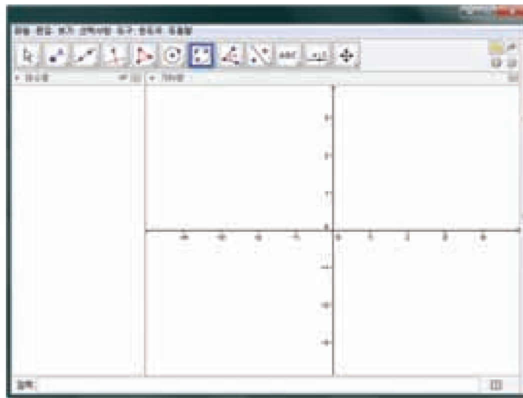
교과서 58 쪽

M+ Engineering



수 학 ✚ 공 학

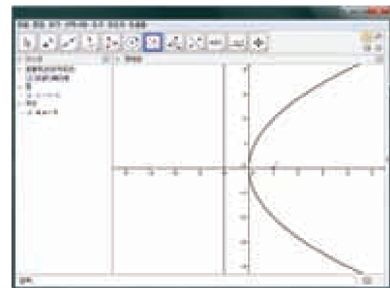
기하 작도용 소프트웨어를 이용하면 이차곡선을 쉽게 그릴 수 있다.



메뉴 아래의 도구상자를 이용하여 포물선, 타원, 쌍곡선을 그려 보자.



1 \ 포물선 $y^2=4x$를 그려 보자.



❶ 도구상자에서 새로운 점 아이콘 을 선택하여 $(1, 0)$에 초점 A를 찍는다.

❷ 실행화면 아래의 수식입력창에 준선의 방정식 $x=-1$을 입력한다.

❸ 도구상자에서 포물선 아이콘 을 선택한다.

❹ 점 A와 직선 $x=-1$을 선택하면 포물선 $y^2=4x$를 그릴 수 있다.

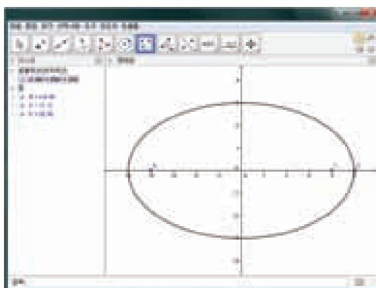
더불어 도구상자에서 이동 아이콘 을 선택하여 점과 직선을 마우스로 잡아끌면서 자유롭게 움직이면 다양한 포물선을 그릴 수 있다.

[다른 방법]

실행화면 아래의 수식입력창에 '포물선[(초점의 좌표), 준선의 방정식]' 을 입력해도 된다. 예를 들어 포물선 $x^2=4y$를 그리려면 수식입력창에 '포물선$[(0, 1), y=-1]$' 을 입력한다.

2 \ 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$을 그려 보자.

❶ 도구상자에서 새로운 점 아이콘 을 선택하여 $(-4, 0)$, $(4, 0)$에 두 초점 A, B를 찍고, $(5, 0)$에 한 꼭짓점 C를 찍는다.
❷ 도구상자에서 타원 아이콘 을 선택한다.
❸ 두 점 A, B를 선택하고 점 C를 선택하면 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$을 그릴 수 있다.



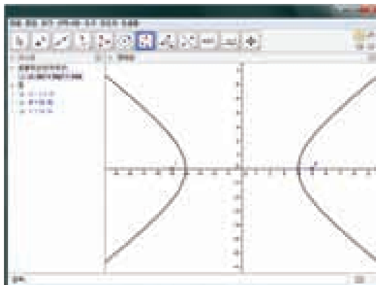
더불어 도구상자에서 이동 아이콘 을 선택하여 세 점을 마우스로 잡아끌면서 자유롭게 움직이면 다양한 타원을 그릴 수 있다.

[다른 방법]
실행화면 아래의 수식입력창에 '타원[(초점의 좌표), (초점의 좌표), 장축의 $\frac{1}{2}$]'을 입력해도 된다. 예를 들어 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$을 그리려면 수식입력창에 '타원[$(0, 4)$, $(0, -4)$, 5]'를 입력한다.

수 학 ✚ 공 학

3 \ 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$을 그려 보자.

❶ 도구상자에서 새로운 점 아이콘 을 선택하여 $(-5, 0)$, $(5, 0)$에 두 초점 A, B를 찍고, $(4, 0)$에 한 꼭짓점 C를 찍는다.
❷ 도구상자에서 쌍곡선 아이콘 을 선택한다.
❸ 두 점 A, B를 선택하고 점 C를 선택하면 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$을 그릴 수 있다.



더불어 도구상자에서 이동 아이콘 을 선택하여 세 점을 마우스로 잡아끌면서 자유롭게 움직이면 다양한 쌍곡선을 그릴 수 있다.

[다른 방법]
실행화면 아래의 수식입력창에 '쌍곡선[(초점의 좌표), (초점의 좌표), 주축의 $\frac{1}{2}$]'을 입력해도 된다. 예를 들어 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$을 그리려면 수식입력창에 '쌍곡선[$(0, 5)$, $(0, -5)$, 3]'을 입력한다.




A 9

돛으로 항해하는 배가 올바른 방향으로 나아가기 위해서는

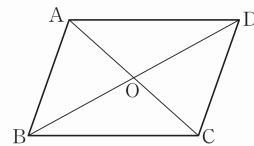
바람의 방향과 세기를 잘 살펴야 한다.

Ⅱ 평면벡터

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중② 평행사변형의 성질

1 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에 대하여 다음 □ 안에 알맞은 선분을 써넣어라.



(1) $\overline{\mathrm{AB}} /\!/ \boxed{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{AD}} /\!/ \boxed{\mathrm{BC}}$

(2) $\overline{\mathrm{AO}} = \boxed{\mathrm{CO}}$, $\overline{\mathrm{BO}} = \boxed{\mathrm{DO}}$

수학Ⅰ 두 점 사이의 거리

2 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) $(1, 2)$, $(3, -1)$ $\sqrt{13}$

(2) $(4, -5)$, $(7, 1)$ $3\sqrt{5}$

수학Ⅰ 직선의 방정식

3 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(1, 2)$를 지나고 기울기가 3인 직선 $y=3x-1$

(2) 두 점 $\mathrm{P}(2, 1)$, $\mathrm{Q}(4, 5)$를 지나는 직선 $y=2x-3$

단원의 지도 목표

1. 벡터의 연산

① 벡터의 뜻을 알게 한다.
② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있게 한다.

2. 평면벡터의 성분과 내적

① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해하게 한다.
② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

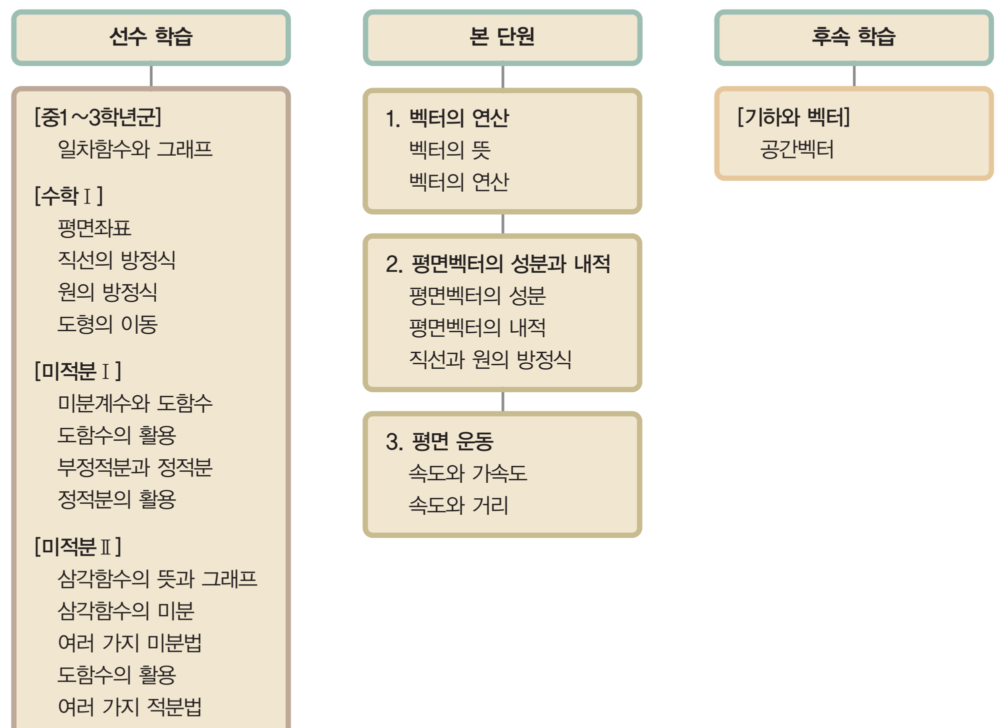
3. 평면 운동

① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.
② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 평면운동을 벡터로 나타내어 속도, 가속도, 이동거리를 구할 수 있게 한다.
② 평면에서 직선의 법선벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식이 직선의 음함수 표현임을 이해하게 한다.
③ 평면에서 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식이 직선의 매개변수 표현임을 이해하게 한다.
④ 벡터방정식 용어는 교수·학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~2	60~61	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 벡터의 연산	중단원 도입		62	• 항해술	
	01 벡터의 뜻		63~65	• 벡터의 뜻	벡터, 시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 평면벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{a}$, $\lvert\vec{a}\rvert$
	02 벡터의 연산	3~8	66~76	• 벡터의 덧셈 • 벡터의 실수배	영벡터 실수배
	수준별 학습	9	77~79	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 평면벡터의 성분과 내적	중단원 도입	10~12	80	• 그림자 극	
	01 평면벡터의 성분		81~88	• 위치벡터의 뜻 • 평면벡터의 성분	위치벡터 벡터의 성분
	02 평면벡터의 내적	13~17	89~96	• 평면벡터의 내적 • 두 평면벡터가 이루는 각의 크기	내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$
	03 직선과 원의 방정식	18~22	97~104	• 좌표평면에서 벡터를 이용한 직선의 방정식 • 좌표평면에서 두 직선이 이루는 각의 크기 • 좌표평면에서 벡터를 이용한 원의 방정식	방향벡터 법선벡터
	수준별 학습	23	105~107	• 중단원 확인 학습 문제	
3. 평면 운동	중단원 도입	24~25	108	• 에피사이클로이드(epicycloid)	
	01 속도와 가속도		109~111	• 미분법을 이용하여 속도와 가속도 구하기	
	02 속도와 거리	26~27	112~116	• 정적분을 이용하여 수직선 위를 움직인 거리 구하기 • 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리 구하기	
	수준별 학습	28	117~119	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		29~30	120~127	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 벡터의 역사

벡터의 개념은 르네상스 시대에 천체의 운동과 관련해서 생긴 것으로 추측된다. 16세기에 들어와서 항해술이 발달하고, 대양에서 배의 위치나 기항지의 밀물과 썰물이 이는 시각을 정확히 알기 위해서는 그 시각의 달이나 행성의 위치를 알 필요가 있었다. 그런데 행성의 운동을 예측하기 위해서는 행성의 운동곡선의 방향에서 접선을 그을 필요가 생기게 되었고, 이때 활용된 것이 벡터의 '합성의 법칙'이다. 이는 서로 다른 두 개의 방향의 힘을 합하면 두 개의 힘과 방향을 변으로 하는 평행사변형의 대각선이 된다는 법칙으로 16세기 네덜란드의 스테빈(Stevin, S. ; 1548~1620)과 이탈리아의 갈릴레이(Galilei, Galileo ; 1564~1642) 등에 의해 발견되었다고 전해지고 있으며, 힘의 합성의 법칙을 명확히 한 것은 영국의 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)의 저서 "Principia"라고 알려져 있다.

곡선의 운동을 2개의 방향으로 분해하고 그 접선의 방향을 정한 사람은 갈릴레이의 제자인 토리첼리(Torricelli, Evangelista ; 1608~1647)와 프랑스의 로베르발(Roberval, G. P. ; 1602~1675) 두 사람이다.

그러나 방향과 크기를 가진 양으로서의 벡터의 발견은 18세기 말 노르웨이의 측량 기사 베셀(Wessel, C. ; 1745~1818)에 의해서였다. 그는 1799년에 처음으로 복소수를 방향을 가진 양으로서 인정하였다.


해밀턴

그리하여 이 생각은 그 후 반세기를 지나 영국의 해밀턴 (Hamilton, W. R. ; 1805~1865)과 독일의 그라스만(Grassmann, H. G. ; 1809~1877)에 의해 3차원으로부터 고차원까지 확장되었다. 해밀턴은 1843년 10월 어느 저녁에 그의 부인과 함께 다리 위를 산책하던 중 4원수의 생각이 퍼뜩 머리에 떠올랐는데 그 즉석에서 기본 공식을 마음에 새겨 두었다고 전해지고 있다.

이렇게 해서 벡터의 기초가 이루어졌으며 계속해서 물리학에 응용되고 미국의 기브스(Gibbs, J. W. ; 1839~1903), 영국의 헤비사이드(Heaviside, O. ; 1850~1925) 등의 물리학자에 의해 완성되었다.

2. 벡터공간(Vector space)

집합 V의 원소들 사이에 덧셈과 실수배가 정의되어 아래의 P1~P8을 만족시키면 V를 (실수상의) 벡터공간이라 하고, V의 원소를 벡터(vector)라고 한다.

P1. $v_1, v_2 \in V$이면

$v_1+v_2=v_2+v_1$

P2. $v_1, v_2, v_3 \in V$이면

$(v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$

P3. V의 임의의 원소 v에 대하여

$v+O=v$인 O가 V에 존재한다.

P4. $v \in V$이면

$v+w=O$인 w가 V에 존재한다.

P5. $k \in R$이고 $v, w \in V$이면

$k(v+w)=kv+kw$

P6. $k_1, k_2 \in R$이고 $v \in V$이면

$(k_1+k_2)v=k_1v+k_2v$

P7. $k_1, k_2 \in R$이고 $v \in V$이면

$k_1(k_2v)=(k_1k_2)v$

P8. $v \in V$이면, $1v=v$

벡터공간 V의 벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_n$에 대하여 모두는 0이 아닌 실수 $k_1, k_2, \cdots, k_n$이 존재하여

$$k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n=O$$

가 성립할 때, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$은 일차종속(linear dependent)이라고 한다. 일차종속이 아니면 일차독립(linear independent)이라고 한다.

또 벡터공간 V의 벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_n$에 대하여

(i) $v_1, v_2, \cdots, v_n$은 일차독립

(ii) $V=\{k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n | k_1, k_2, \cdots, k_n \in R\}$

를 만족시키는 $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$을 V의 기저(basis)라고 한다. 이때 V를 n차원 벡터공간이라 하고, $\dim V=n$으로 표시한다.

3. 벡터의 내적

두 벡터의 곱은 그 결과가 실수가 되는 경우와 벡터가 되는 경우가 있다. 전자를 내적(inner product), 후자를 외적(outer product)이라고 한다.

내적에 대하여 자세히 알아보자.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 고 할 때, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라고 한다. 특히

$R^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in R, i=1, 2, \cdots, n\}$일 때

R^n의 두 벡터 $\vec{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $\vec{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$에 대하여

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$
$$= u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$$

을 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$의 내적이라고 한다.

벡터의 내적에 대하여 다음 성질이 성립한다.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^n$, $k \in R$에 대하여

① $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

② $\vec{u} \cdot (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (\vec{v}+\vec{w}) \cdot \vec{u}$

③ $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

④ $\vec{u}=\vec{0}$이면 $\vec{u} \cdot \vec{u}=0$이고 $\vec{u} \neq \vec{0}$이면 $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

R^n의 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$에 대하여 $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$일 때, $\vec{u}$, $\vec{v}$는 서로 수직이라 하고 $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$를 벡터 $|\vec{u}|$의 노름(norm) 또는 길이(length)라고 한다. 또 노름이 1인 벡터를 단위벡터라고 한다. 특히 제i성분이 1이고, 그 밖의 모든 성분이 0인 벡터 $\vec{e_i}$는 단위벡터이다.

$\vec{e_i}$는 다음과 같이 나타내어지고 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$을 기본 단위벡터라고 한다.

$$\vec{e_1}=(1, 0, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$\vec{e_2}=(0, 1, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$\vdots$$
$$\vec{e_n}=(0, 0, 0, 0, \cdots, 1)$$

벡터의 노름에 대하여 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 임의의 벡터일 때, 다음이 성립한다.

① $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

② $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$

위의 성질을 증명하여 보자.

① 내적의 정의에 의하여 $|\cos\theta| \leq 1$이므로

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}||\cos\theta| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

② $|\vec{u}+\vec{v}|^2 \leq (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v})$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$
$$\leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| + |\vec{v}|^2$$
$$= (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2$$

따라서 $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$

4. 벡터를 이용한 오류수정

부호 이론은 정보 이론에 확률 개념을 도입하여 정보를 컴퓨터의 기본 단위인 bit로 바꾸어 계산된 정보의 양과 통신료의 용량을 넘지 않는 범위에서 오류없이 정보전달이 가능하다는 이론이 발표되면서 연구가 시작되었다. 전문을 부호로 바꾸어 보내면 도중에 소음이 끼어들어 수신된 벡터는 오류를 포함하고 있게 된다. 이때 오류를 수정하기 위해서 NNDR(Nearest Neighborhood Decoding Rule)을 사용할 수 있다. NNDR은 거리 개념을 이용하여 수신된 벡터와 가장 가까운 거리에 있는 벡터로 복호하는 방법이다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원		Ⅱ. 평면벡터	쪽수	교과서 60~63쪽
소단원		1. 벡터의 연산　01 벡터의 뜻	차시	1/30
학습 목표		벡터의 뜻을 안다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 벡터의 뜻을 안다.		
전개	탐구 활동 개념 학습	탐구 활동을 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. 학습 내용 설명 **벡터** (1) 바람은 '초속 30 m의 남동풍'과 같이 크기와 방향을 함께 밝혀 주어야만 그 양을 정확히 나타낼 수 있다. 이처럼 크기와 방향을 함께 가지는 양을 벡터라고 한다. (2) 물건의 무게, 건물의 높이와 같이 크기만 가지는 양을 스칼라라고 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	본시의 학습 내용을 정리한다. 다음 차시를 예고한다. • 벡터와 그 크기를 나타내는 방법을 안다.		

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅱ. 평면벡터	쪽수	교과서 64~65쪽
소단원		1. 벡터의 연산　01 벡터의 뜻	차시	2/30
학습 목표		벡터와 그 크기를 나타내는 방법을 안다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 크기와 방향을 가지는 벡터를 수학적으로 어떻게 표현하는 것이 좋을지 말하여 보자. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 벡터와 그 크기를 나타내는 방법을 안다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◐ 학습 내용 설명 **벡터의 표현** (1) 점 A에서 점 B로 향하는 화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타내고, 이것을 기호로 $\overrightarrow{AB}$와 같이 나타낸다. 특히 한 문자로 나타낼 때에는 기호로 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\cdots$와 같이 나타낸다. (2) 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점: 점 A (3) 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 종점: 점 B (4) 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기(선분 AB의 길이): $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $\lvert\vec{a}\rvert$ (5) 단위벡터: 크기가 1인 벡터 (6) 평면벡터: 평면에 주어진 벡터 **서로 같은 벡터와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터** (1) 크기와 방향이 같은 두 벡터는 서로 같다고 하며, $\vec{a}=\vec{b}$ 또는 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$와 같이 나타낸다. (2) 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 $-\vec{a}$와 같이 나타낸다. 즉, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ ◐ 문제 1, 2, 3, 4번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 벡터의 덧셈을 할 수 있다.		

1 벡터의 연산

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 벡터의 뜻을 알게 한다.

② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 벡터의 뜻	벡터의 뜻
02 벡터의 연산	벡터의 덧셈
	벡터의 실수배
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 62 쪽

1 벡터의 연산

항해술

9세기 신라는 활발한 해상 무역을 펼치며 동북아시아 바다의 주인으로 군림하였는데, 장보고가 이에 큰 역할을 하였다. 당나라에서 군인 생활을 한 그는 신라로 돌아와 청해에 진을 설치하여 무역을 방해하는 해적을 소탕하고 신라를 해상 무역의 중심으로 이끌었다.

장보고의 이러한 노력뿐만 아니라 신라의 항해술도 해상 무역의 발전에 기여하였다. 항해술이란 항해 중인 선박이 현재 위치한 곳을 알고 가까운 길과 흐르는 해류 등을 추정하여 항해하는 기술인데, 당시 신라의 항해술은 일본 사신이나 승려가 중국에 갈 때 신라의 도움을 받을 정도로 뛰어났다. 이는 동북아시아에서뿐만 아니라 세계적으로도 우수한 수준이었다고 하는데, 이와 같은 항해술을 기반으로 신라는 여러 나라를 자유로이 오갈 수 있었다.



신라의 우수한 항해술은 바다에서 배의 위치나 밀물과 썰물의 정확한 시각 예측에서 비롯된다. 밀물과 썰물 등의 자연 현상은 달을 비롯한 행성들의 운동과 밀접한 관련이 있기 때문에 행성의 운동을 예측하는 것이 필요한데, 이때 행성의 운동 방향과 속력을 가지는 양의 연산이 필요하다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 76쪽

해류가 있을 때와 해류가 없을 때 배의 진행 방향에는 어떤 차이가 있을까?

들어가면서 벡터는 크기와 방향을 동시에 갖는 것으로서 물리학과 공학에서는 기본적이면서도 매우 중요한 개념이다. 벡터를 화살표를 이용한 기하학적인 방법으로 나타낼 수 있게 됨으로써 여러 가지 물리학의 문제들을 직관적인 방법으로 쉽게 해결할 수 있다.

이 단원에서는 이와 같은 벡터의 개념을 화살표라는 간단한 도구를 이용하여 설명할 수 있음과 벡터의 방향, 벡터의 크기 등 벡터에 대한 핵심적인 개념을 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.	상	벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 하는 과정을 설명할 수 있다.
	중	벡터의 뜻을 알고, 벡터의 연산에 대한 성질을 이용하여 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
	하	그림으로 주어진 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

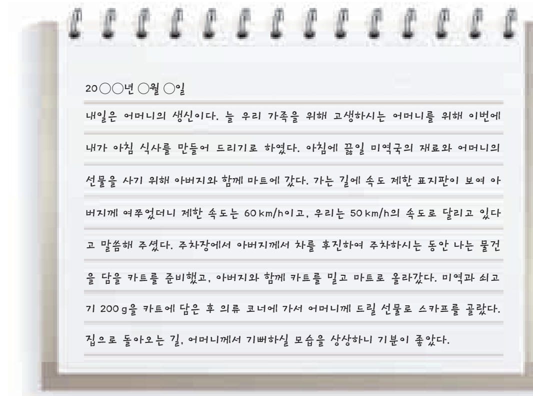
교과서 63 쪽

01 벡터의 뜻

● 벡터의 뜻을 안다.

벡터란 무엇인가?

탐구 활동 다음은 현민이가 쓴 일기이다. 글을 읽고 물음에 답하여 보자.



1. 일기에서 크기를 가지는 양을 찾아보자.
2. 1에서 크기뿐만이 아니라 방향을 가지는 양을 말하여 보자.

물건의 무게, 건물의 높이, 자동차의 속력 등은 크기만 가지고 있으므로 그 양을 실수로 나타낼 수 있다. 그러나 물체를 미는 힘, 물체가 움직이는 속도와 가속도 등은 크기뿐만 아니라 그것이 작용하는 방향도 함께 밝혀 주어야 그 양을 나타낼 수 있다.
이를테면 바람은 '초속 30 m의 남동풍'과 같이 크기와 방향을 함께 밝혀 주어야만 그 양을 정확히 나타낼 수 있다. 이처럼 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **벡터**라고 한다.

● 크기만 가지는 양을 스칼라(scalar)라고 한다.

● 벡터는 영어로 vector이다.

새로 나온 용어와 기호

- 벡터(vector)
- 시점(始點, initial point)
- 종점(終點, terminal point)
- 벡터의 크기(norm of vector)
- 단위벡터(unit vector)
- 평면벡터(plane vector)
- $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $|\vec{a}|$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 실생활에서 사용하는 양 중에서 크기만으로 충분히 나타낼 수 있는 것이 있고, 크기와 방향을 모두 사용하여야만 정확히 나타낼 수 있는 것이 있음을 깨닫고 그 둘을 구별할 수 있도록 한다.

1. 60 km/h, 50 km/h, 200 g

2. 60 km/h, 50 km/h

01 벡터의 뜻

소단원 지도 목표

① 벡터의 뜻을 알고, 벡터를 시점과 종점이 있는 유향선분으로 나타낼 수 있다는 것을 이해하게 한다.
② 벡터의 크기와 단위벡터의 뜻을 알게 한다.
③ 두 벡터가 서로 같을 조건을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 벡터의 뜻은 스칼라와 비교하여 지도하고, 특히 실생활의 구체적인 예를 도입하여 알게 한다.

2. 벡터는 크기와 방향을 모두 가지는 양이라는 개념을 알게 한다.

3. 시점과 종점이 일치하지 않더라도 크기와 방향이 같으면 두 벡터가 같다는 것을 유의시킨다.

지/도/자/료

학생들에게 벡터와 스칼라는 익숙하지 않은 개념이다. 속도와 속력을 혼동하는 학생들이 많은 것도 벡터와 스칼라의 개념이 정립되지 않았기 때문이다. 따라서 실생활 속에서의 여러 가지 예를 통하여 벡터와 스칼라를 구분할 수 있도록 한다.
크기와 방향을 함께 가지는 양을 벡터(vector)라 하고, 길이, 넓이, 속력 등과 같이 크기만을 가지는 양을 스칼라(scalar)라고 한다. 일반적으로 스칼라는 수직선 위에 나타낼 수 있다. 예를 들어, 일기예보에서 흔히 언급하는 바람의 속력은 하나의 실수를 이용하여 나타낼 수 있으므로 수직선 위에 표시할 수도 있다. 하지만 바람의 방향과 속력을 동시에 나타내려면 수직선 위에서는 가능하지 않으며 화살표를 이용하여 나타낼 수 있다. 이와 같은 예를 통하여 속도처럼 크기와 방향을 함께 가지는 벡터를 그림으로 나타낼 때는 화살표가 매우 유용한 도구임을 깨닫게 한다.

교과서 64 쪽

벡터는 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 점 B로 향하는 화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타내고, 이것을 기호로

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

와 같이 나타낸다.

이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **시점**, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **종점**이라고 한다.

❶ 또 선분 AB의 길이를 **벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기**라 하고, 이것을 기호로

$$|\overrightarrow{AB}|$$

와 같이 나타낸다.

벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 기호로

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$$

와 같이 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는 기호로

$$|\vec{a}|$$

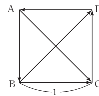
와 같이 나타낸다. 특히 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 한다.

또한 평면에 주어진 벡터를 **평면벡터**라고 한다.

보기 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DA}|=1$$
$$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2}$$

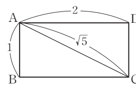
이고, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$는 단위벡터이다.



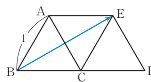
문제 1 오른쪽 그림과 같은 직사각형에 대하여 다음 벡터를 모두 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AC}$와 크기가 같은 벡터

(2) 단위벡터



발전 **문제 2** 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 3개를 이어 붙여 만든 도형이다. 이 도형에서 벡터 $\overrightarrow{BE}$의 크기를 구하여라.



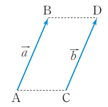
교과서 65 쪽

❷ 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$의 크기와 방향이 같을 때 두 벡터는 서로 같다고 하며, 기호로

$$\vec{a}=\vec{b} \text{ 또는 } \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

와 같이 나타낸다.

즉, 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 벡터 $\overrightarrow{CD}$와 겹쳐지면 두 벡터는 시점은 다르지만 그 크기와 방향이 각각 같으므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이다.



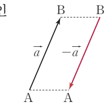
$|-\vec{a}|=|\vec{a}|$
$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$

한편 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 기호로

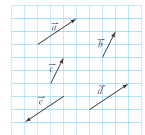
$$-\vec{a}$$

와 같이 나타낸다.

즉, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$이다.



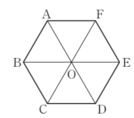
보기 오른쪽 그림에서 $\vec{a}$와 $\vec{d}$, $\vec{b}$와 $\vec{c}$는 크기와 방향이 서로 같은 벡터이므로 $\vec{a}=\vec{d}$, $\vec{b}=\vec{c}$이다. 또 $\vec{a}$와 $\vec{e}$, $\vec{d}$와 $\vec{e}$는 크기는 같고 방향이 반대인 벡터이므로 $\vec{a}=-\vec{e}$, $\vec{d}=-\vec{e}$이다.



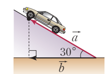
문제 3 오른쪽 그림과 같은 정육각형 ABCDEF에서 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$의 교점을 O라고 할 때, 다음 벡터를 모두 구하여라.

(1) $\overrightarrow{CD}$와 같은 벡터

(2) $\overrightarrow{OA}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터



실생활 **문제 4** 오른쪽 그림과 같이 자동차가 지면과 30°의 각을 이루고 있는 경사면을 오를 때의 속도 50 km/h를 벡터 $\vec{a}$라고 할 때, 지면에 수평인 방향에서의 속도를 나타내는 $\vec{b}$의 크기를 구하여라.



본문 해설

❶ 수직선 위의 두 점 A(a), B(b) 사이의 거리는 $\overline{AB}=|b-a|$이다. 이와 같이 절댓값 기호는 거리 또는 길이를 나타낼 때 자주 쓰인다.

마찬가지로 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기도 선분 AB의 길이와 같으므로 벡터의 크기를 $|\overrightarrow{AB}|$와 같이 나타낸다.

1

목표| 벡터의 크기를 구할 수 있게 하고, 단위벡터의 뜻을 알게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{\mathbf{CA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$, $\overrightarrow{\mathbf{DB}}$

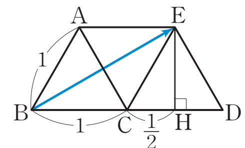
(2) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$, $\overrightarrow{\mathbf{DC}}$

2

목표| 벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 E에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{|\overrightarrow{BH}|^2+|\overrightarrow{EH}|^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\mathbf{3}}$$



본문 해설

❷ 두 벡터가 같다면 크기와 방향이 모두 같으므로 한 벡터를 평행이동해서 시점을 일치시키면 다른 벡터와 일치하게 된다. 즉, 벡터는 위치와는 관계없이 크기와 방향에 의해 결정되는 개념이다.

3

목표| 서로 같은 벡터와 역벡터의 뜻을 알게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{\mathbf{AF}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BO}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OE}}$ (2) $\overrightarrow{\mathbf{AO}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$, $\overrightarrow{\mathbf{FE}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OD}}$

4

목표| 벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $|\vec{a}|=50$이므로

교과서 66 쪽

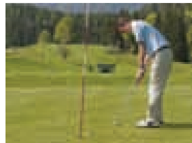
02 벡터의 연산

● 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

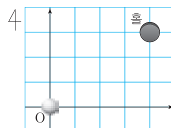
벡터의 덧셈은 어떻게 하는가?

생각 열기 **골프**

골프는 정지된 공을 골프채로 쳐서 그린에 있는 홀에 넣을 때까지 소요된 타수가 적은 사람이 이기는 경기이다. 골프를 생각하면 스윙을 하는 모습을 떠올리기 쉽지만, 낮은 타수를 위해서는 그린에서의 퍼팅이 중요한데 퍼팅이란 그린에 올라온 공을 굴려 치는 방법을 말한다.



탐구 활동 **세라는 그린에서 공을 한 번 쳐서 동쪽으로 4 m 굴리고, 그 공을 다시 한 번 쳐서 북쪽으로 3 m 굴려 홀에 넣었다. 오른쪽 그림에서 한 눈금의 크기는 1 m를 나타낸다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**



1. 세라가 친 공의 움직임을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.
2. 공을 한 번 쳐서 홀에 넣었을 때, 공의 움직임을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.

두 벡터의 덧셈에 대하여 알아보자.

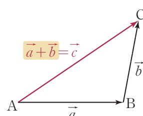
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$가 되도록 세 점 A, B, C를 잡을 때, $\overrightarrow{AC}$로 나타내어지는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고, 기호로

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \text{ 또는 } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

와 같이 나타낸다.

● 삼각형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때에는 $\vec{a}$의 종점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

● $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

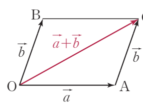


한편 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$이므로

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

이다.

● 평행사변형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때에는 $\vec{a}$의 시점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.



$$|\vec{b}|=|\vec{a}|\cos 30^\circ=50\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{25\sqrt{3}}$$

02 벡터의 연산

소단원 지도 목표

① 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있게 한다.

② 벡터의 덧셈과 벡터의 실수배에 대한 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 벡터의 실수배와 두 벡터의 평행 관계를 알게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 벡터의 합과 차는 그림을 이용하여 직관적으로 이해하게 한다.

2. 벡터의 덧셈은 삼각형법과 평행사변형법 등 기하학적인 방법을 적절하게 이용할 수 있음을 알게 한다.

3. 벡터의 뺄셈은 역벡터와의 덧셈으로 정의하고, 기하학적으로 표현할 수 있게 한다.

4. 벡터의 덧셈을 이용하여 벡터의 실수배를 설명하고, 벡터의 실수배도 벡터임을 이해시킨다.

5. 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 실수배 $k\vec{a}$를 $\vec{a}k$로 나타내지 않도록 지도한다.

6. 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 벡터의 평행 조건을 이용하여 알 수 있게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 영벡터(zero vector)
- 실수배(實數倍, real number multiple)

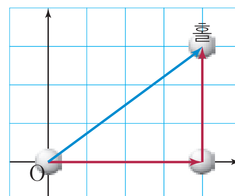
생각 열기 참/고/자/료

골프는 클럽이라고 부르는 골프채로 정지된 공을 쳐서 홀에 넣을 때까지 소요된 타수가 적은 사람이 승리하는 경기이다. 그 유래에 대해서는 몇 가지 주장이 있는데, 네덜란드의 헤드 콜벤이라는 하키 비슷한 놀이가 14세기 무렵 스코틀랜드로 전해져 골프로 발전했다는 설이 가장 유력하다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 공의 움직임을 벡터를 이용하여 나타내어 보고, 두 벡터의 합을 어떻게 정의할 것인지를 고민해 보게 하기 위한 것이다.

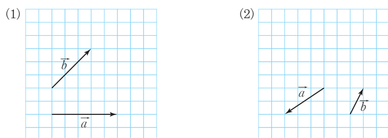
1. 세라가 친 공의 움직임을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림의 빨간색 선과 같다.



2. 공을 한 번 쳐서 홀에 넣었을 때, 공의 움직임을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내면 위의 그림의 파란색 선과 같다.

문제 1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음과 같을 때, $\vec{a}+\vec{b}$를 그림으로 나타내어라.

(1) (2)



벡터의 덧셈에 대한 연산법칙을 알아보자.

오른쪽 그림과 같은 평행사변형 OACB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때,

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$$

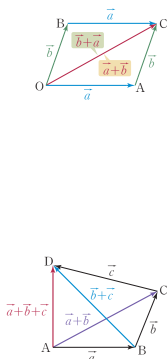
이므로

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

이다. 따라서

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.



또 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{CD}$$

가 되도록 네 점 A, B, C, D를 잡으면

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AD}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$
$$=\overrightarrow{AD}$$

이다. 따라서

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **벡터의 덧셈에 대한 연산법칙**

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

결합법칙에 의하여 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$와 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$는 간단히 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$와 같이 쓴다.

문제 2 서로 다른 임의의 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$를 간단히 하여라.

❷ 벡터 $\overrightarrow{AA}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 하고, 기호로

$$\vec{0}$$

와 같이 나타낸다.

이때 영벡터의 크기는 0이고, 그 방향은 생각하지 않는다.

임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$라고 하면

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$$

이다. 또 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이므로

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

이다.

일반적으로 임의의 벡터 $\vec{a}$와 영벡터 $\vec{0}$에 대하여 다음이 성립한다.

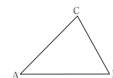
영벡터와 벡터의 덧셈

(1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(2) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

보기 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에 대하여

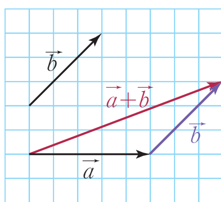
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

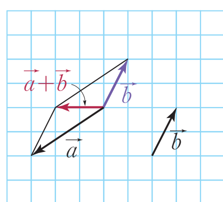


1

목표| 두 벡터의 합을 그림으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) (2)





본문 해설

❶ 벡터의 덧셈에 대한 연산법칙은 실수의 덧셈에 대한 연산법칙과 같다.

2

목표| 벡터의 덧셈에 대한 연산법칙을 이용하여 벡터의 덧셈을 할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$$
$$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{CB}$$

본문 해설

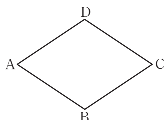
❷ 영벡터는 한 점으로 나타내어지므로 그 크기는 $|\vec{0}|=0$이고, 방향은 생각하지 않는다. 이때 영벡터를 '없는 벡터'로 오해하지 않는다.

또 영벡터는 벡터의 덧셈에 대한 항등원으로서 의미를 가진다.

교과서 69 쪽

문제 3 오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD에서 다음이 성립함을 증명하여라.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$



❶ 이제 벡터의 뺄셈에 대하여 알아보자.

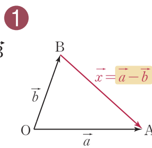
오른쪽 그림과 같은 삼각형 OAB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때,

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$$

를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고, 기호로

$$\vec{a}-\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



❷ 이때 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$이다.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$
$=\overrightarrow{BA}$

한편 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 OACB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때,

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$$

이다. 그런데

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$$
$$-\vec{b}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CA}$$

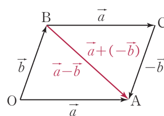
이므로

$$\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$$

이다. 따라서

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

❸ **벡터의 뺄셈**
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$일 때
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

역벡터는 크기가 같고 방향만 반대이다.
즉, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$이면 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이고
$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$이다.
또 역벡터는 벡터의 덧셈에 대한 역원으로서 의미를 가진다.
$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$
$(-\vec{a})+\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
한편 위의 관계식에서 $-(-\vec{a})=\vec{a}$임을 알 수 있다.

❸ 임의의 벡터 $\overrightarrow{BA}$는
$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 또는 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}$와 같이 임의의 점을 시점으로 하는 두 벡터의 차로 나타낼 수 있다. 이와 같은 벡터의 뺄셈의 성질은 시점이 서로 다른 벡터들을 시점이 같도록 변형할 때 유용하게 사용된다.

3

목표| 벡터의 덧셈에 대한 연산법칙을 이용하여 영벡터임을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

본문 해설

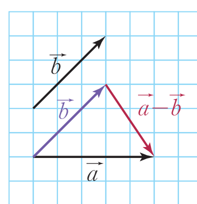
❶ 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$를 그림으로 나타내기 위해서는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 시점을 일치시킨 다음, $\vec{b}$의 종점을 시점으로 하고, $\vec{a}$의 종점을 종점으로 하는 벡터를 그리면 된다.

❷ 점 A를 시점으로 하고 점 B를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$에 대하여 시점과 종점을 바꾼 벡터 $\overrightarrow{BA}$를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 역벡터라 하고, $-\overrightarrow{AB}$로 나타낸다.

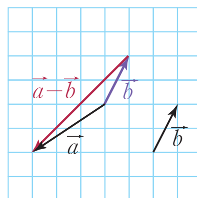
4

목표| 두 벡터의 차를 그림으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1)

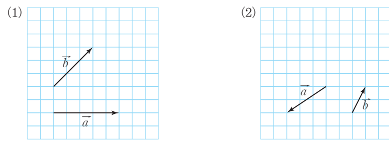


(2)



교과서 70 쪽

문제 4 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음과 같을 때, $\vec{a}-\vec{b}$를 그림으로 나타내어라.



예제 01 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{BC}$

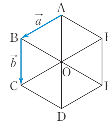
풀이 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$

답 (1) $\vec{b}-\vec{a}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}$

문제 5 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선의 교점을 O, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{OF}$ (2) $\overrightarrow{CD}$ (3) $\overrightarrow{DF}$



사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

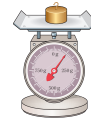
평면 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$가 성립할 때, 점 P는 어떤 위치에 있는지 설명하여 보자.

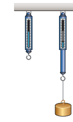
교과서 71 쪽

벡터의 실수배는 어떻게 하는가?

탐구 활동

지구가 물체를 수직 방향으로 끌어당기는 힘을 중력이라고 하며, 이 중력이 물체를 끌어당기는 힘의 크기를 무게라고 한다. 다음 그림과 같은 접시저울에 무게가 100 g인 추를 올려놓았을 때, 추에 작용하는 중력을 벡터 $\vec{a}$라고 하자. 물음에 답하여 보자.







1. 접시저울에 무게가 200 g인 추를 올려놓았을 때, 추에 작용하는 중력을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.
2. 접시저울에 무게가 50 g인 추를 올려놓았을 때, 추에 작용하는 중력을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.
3. 1, 2를 벡터 $\vec{a}$와 비교하여 보자.

영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{a}$는 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다.

이것을

$$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$$

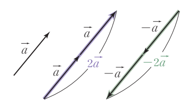
로 나타낸다.

또 $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다.

이것을

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})=-2\vec{a}$$

로 나타낸다.



5

목표 | 벡터를 임의의 한 점을 시점으로 하는 두 벡터의 차로 나타낼 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$
$=-\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$
$=-\vec{a}-\vec{b}$

사고력 기르기 추론

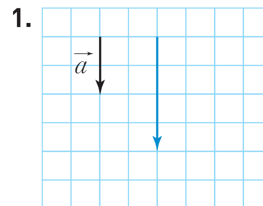
출제 의도 | 영벡터와 벡터의 덧셈의 성질을 이해하여 점 P의 위치를 설명할 수 있게 한다.

풀이 | $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PB}$이므로 점 P는 $\overline{AB}$의 중점이다.

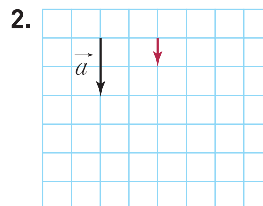
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 무게가 다른 추에 작용하는 중력을 벡터로 나타내 보게 함으로써 벡터의 실수배의 의미를 이해하게 한다.

1.



2.



3. 1은 벡터 $\vec{a}$와 방향은 같고 크기가 2배이고

2는 벡터 $\vec{a}$와 방향은 같고 크기가 $\frac{1}{2}$배이다.

교과서 72 쪽

일반적으로 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 **실수배**라 하고, 다음과 같이 정의한다.

$1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

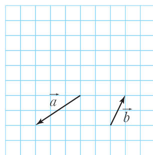
❶ **벡터의 실수배**

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 실수 k에 대하여 $k\vec{a}$는
① $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.
② $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.
③ $k=0$이면 $\vec{0}$이다.
(2) $\vec{a}=\vec{0}$일 때, 임의의 실수 k에 대하여 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

보기 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $|\vec{a}|$의 1.5배인 벡터는 $1.5\vec{a}$이다.
$\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|\vec{a}|$의 3배인 벡터는 $-3\vec{a}$이다.

문제 6 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 벡터를 그림으로 나타내어라.

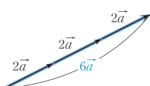
(1) $2\vec{a}$ (2) $-4\vec{b}$ (3) $2\vec{a}+\vec{b}$

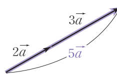


창의 up

$\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 벡터 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터임을 설명하여라.

벡터의 실수배에 대한 성질을 알아보자.
다음 그림에서 $3(2\vec{a})=6\vec{a}$, $2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a}$가 성립함을 알 수 있다.



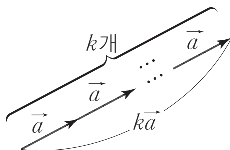


본문 해설

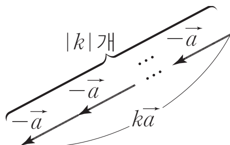
❶ 벡터는 방향과 크기를 모두 갖는다. 벡터의 실수배 $k\vec{a}$에서의 실수 k도 두 가지 성질을 모두 갖는다. k의 부호는 벡터의 방향에 영향을 주고, k의 절댓값은 벡터의 크기에 영향을 준다. 일반적으로 벡터 $k\vec{a}$의 크기는 $|k||\vec{a}|$로 설명할 수 있다.

즉, $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 임의의 실수 k에 대하여

(i) $k>0$일 경우



(ii) $k<0$일 경우

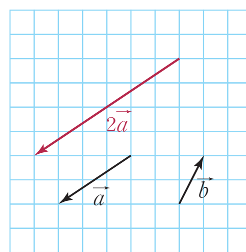


(iii) $k=0$일 경우
$k\vec{a}=0\vec{a}=\vec{0}$

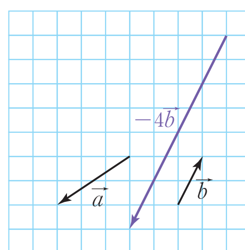
6

목표| 벡터의 실수배를 그림으로 나타낼 수 있게 한다.

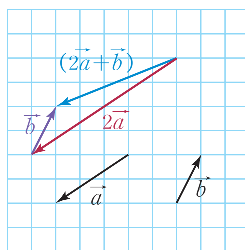
풀이| (1)



(2)



(3)

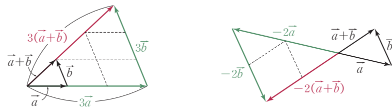


창의 UP

출제 의도| 벡터의 실수배의 성질을 이용하여 벡터 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터임을 설명할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{1}{|\vec{a}|}=k$라고 하면 $k>0$이므로 벡터 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=k|\vec{a}|$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고, $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$의 크기는 $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=1$이므로 단위벡터이다.

또 다음 그림에서 $3\vec{a}+3\vec{b}=3(\vec{a}+\vec{b})$, $-2\vec{a}-2\vec{b}=-2(\vec{a}+\vec{b})$가 성립함을 알 수 있다.



일반적으로 다음이 성립한다.

벡터의 실수배에 대한 성질

실수 k, l과 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

(1) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ (결합법칙)

(2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (분배법칙)

(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (분배법칙)

❶ 예제 **02** $3(\vec{a}+2\vec{b})-(4\vec{a}-\vec{b})$를 간단히 하여라.

풀이 $3(\vec{a}+2\vec{b})-(4\vec{a}-\vec{b})=3\vec{a}+3(2\vec{b})-4\vec{a}+\vec{b}$

$=3\vec{a}+6\vec{b}-4\vec{a}+\vec{b}$

$=(3-4)\vec{a}+(6+1)\vec{b}$

$=-\vec{a}+7\vec{b}$

답 $-\vec{a}+7\vec{b}$

문제 **7** 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3(\vec{a}+3\vec{b})+2(-\vec{a}+4\vec{b})$ (2) $2(\vec{a}-5\vec{b}+2\vec{c})-3(-\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c})$

문제 **8** 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

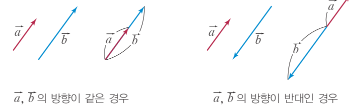
(1) $\vec{a}+2\vec{x}=5\vec{a}-4\vec{b}$ (2) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{x}=2(\vec{x}-4\vec{a})$

❷ 벡터의 평행에 대하여 알아보자.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며, 기호로

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



$\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같은 경우 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 반대인 경우

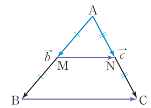
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

벡터의 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

예제 **03** 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, $\overrightarrow{MN}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$임을 증명하여라.



증명 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라고 하면

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$=\vec{c}-\vec{b}$

한편 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{c}$이므로

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$

$=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

따라서 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$이므로 $\overrightarrow{MN}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$이다.

본문 해설

❶ 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배의 계산은 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 등을 문자로 보고 다항식의 계산과 같은 방법으로 계산한다.

7

목표| 벡터의 실수배에 대한 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) (주어진 식)$=3\vec{a}+9\vec{b}-2\vec{a}+8\vec{b}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+17\vec{b}}$

(2) (주어진 식)$=2\vec{a}-10\vec{b}+4\vec{c}+3\vec{a}-12\vec{b}+3\vec{c}$

$=\boldsymbol{5\vec{a}-22\vec{b}+7\vec{c}}$

8

목표| 벡터의 실수배에 대한 성질을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $2\vec{x}=4\vec{a}-4\vec{b}$이므로 $\boldsymbol{\vec{x}=2\vec{a}-2\vec{b}}$

(2) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{x}=2\vec{x}-8\vec{a}$에서

$3\vec{x}=9\vec{a}+3\vec{b}$이므로 $\boldsymbol{\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b}}$

본문 해설

❷ 두 벡터가 평행하다는 것은 두 벡터가 같은 방향일 때뿐만 아니라 반대 방향일 때도 포함된다. 따라서 영벡터가 아닌 두 벡터가 평행함을 보이기 위해서는 한 벡터가 다른 한 벡터의 실수배와 같음을 보이면 된다. 이때 그 실수가 양수이면 두 벡터는 같은 방향이고, 음수이면 두 벡터는 반대 방향이다.

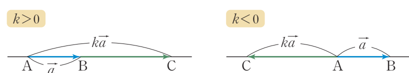
교과서 75 쪽

문제 9 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않을 때, 두 벡터 $\vec{a}+3\vec{b}$와 $k\vec{a}-6\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

창의 up 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 사각형 ABCD는 어떤 사각형인지 설명하여라.

❶ 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.



예제 04 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=4\vec{a}-\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

증명 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\vec{a}+2\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$
$=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}-\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$
$=2\vec{a}-2\vec{b}$
$=-2(-\vec{a}+\vec{b})$

따라서 $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

본문 해설

❶ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$($k\neq0$인 실수)와 같이 공유하고 있는 점이 없는 두 벡터가 실수배의 관계에 있을 때에는 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$는 서로 평행하다.
특히 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$ ($k\neq0$인 실수)와 같이 두 벡터의 시점 또는 종점 중 한 점을 공유하고 있는 벡터가 실수배로 표현될 때는 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있게 된다.

9

목표| 두 벡터가 서로 평행할 조건을 알게 한다.

풀이| 두 벡터 $\vec{a}+3\vec{b}$와 $k\vec{a}-6\vec{b}$가 서로 평행하려면 $k\vec{a}-6\vec{b}=t(\vec{a}+3\vec{b})$를 만족시키는 실수 t가 존재해야 한다.
이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로
$k\vec{a}-6\vec{b}=t\vec{a}+3t\vec{b}$에서 $k=t$, $-6=3t$
따라서 $t=-2$이므로 구하는 실수 k의 값은 -2이다.

창의 UP

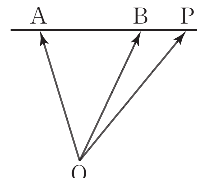
출제 의도| 벡터의 연산법칙과 벡터의 평행 조건을 이용하여 사각형 ABCD가 어떤 사각형인지 설명할 수 있게 한다.

풀이| $2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$이므로 $2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$
따라서 $\overline{DA}\,/\!/\,\overline{CB}$이고 $2\overline{DA}=\overline{CB}$이므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

지/도/자/료 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

서로 다른 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있으려면
(1) $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AP}$
(2) $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$($k\neq0$인 실수)
(3) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $(s+t=1)$

증명| 선분 AB와 선분 AP를 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AP}$로 생각하면 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AP}$는 임의의 실수 $k(k\neq0)$에 대하여
$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$
이때 한 점 O에 대하여
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$를 생각하면
$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$
합: 1



10

목표| 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 알게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(m\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})$

$=(m-1)\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(-\vec{a}-3\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})$

$=-2\vec{a}-4\vec{b}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, 즉

$-2\vec{a}-4\vec{b}=k\{(m-1)\vec{a}+2\vec{b}\}$

를 만족시키는 실수 k가 존재해야 한다.

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$-2\vec{a}-4\vec{b}=k(m-1)\vec{a}+2k\vec{b}$에서

$-2=k(m-1)$, $-4=2k$

따라서 $k=-2$이므로 구하는 실수 m의 값은 2이다.

교과서 76 쪽

문제 10 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=m\vec{a}+3\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=-\vec{a}-3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m의 값을 구하여라.

(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

사각형 ABCD와 임의의 점 O에 대하여

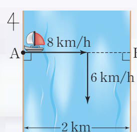
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$$

가 성립할 때, 이 사각형은 어떤 사각형인지 설명하여 보자.

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

오른쪽 그림과 같이 한 섬의 A 지점에서 배를 타고 정동쪽으로 2 km 떨어진 다른 섬으로 건너가려고 한다. 해류의 속도는 시속 6 km이고, 흐르지 않는 물에서의 속도가 시속 8 km로 일정한 배가 선착장인 A 지점에서 정동쪽으로 출발한다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) 배의 실제 속도를 구하여라.

(2) 배가 바다를 건너는 데 걸리는 시간을 구하여라.

(3) 배가 도착하게 되는 지점은 B 지점에서 얼마나 떨어진 곳인지 구하여라.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 벡터의 연산법칙과 벡터의 평행 조건을 이용하여 사각형 ABCD가 어떤 사각형인지 설명할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

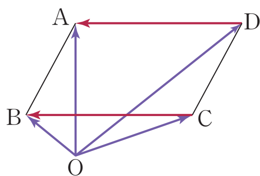
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

즉, $\overrightarrow{DA}/\!/\overrightarrow{CB}$이고

$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|$이므로

사각형 ABCD는 평행사변형이다.



단원 과제

목표| 벡터의 연산을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) 배의 실제 속도는

$\sqrt{8^2+6^2}=\mathbf{10(km/h)}$

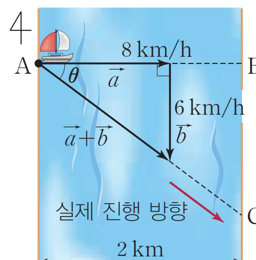
(2) 배가 도착하게 되는 지점을 C라고 하면 바다를 건너는 데 움직여야 하는 거리는 $\overline{AC}$의 길이이므로

$10:8=\overline{AC}:2$에서

$\overline{AC}=2.5(\text{km})$

따라서 바다를 건너는 데

걸리는 시간은 $\dfrac{2.5}{10}$시간$=$**15분**



(3) $2:\overline{BC}=8:6$에서 $\overline{BC}=\dfrac{3}{2}(\text{km})$

따라서 배는 B 지점으로부터 $\mathbf{\dfrac{3}{2}}$ **km** 떨어진 지점에 도착하게 된다.

교과서 77 쪽

중단원 기초

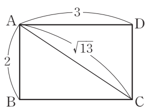
[해답 p.209]

수준별 학습

1 오른쪽 그림의 직사각형에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AB}$와 크기가 같은 벡터

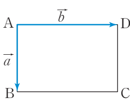
(2) $\overrightarrow{AC}$와 크기가 같은 벡터



01 벡터의 뜻
벡터의 크기

2 오른쪽 그림의 직사각형에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{DC}$　　　(2) $-\overrightarrow{BC}$

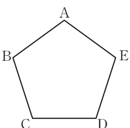


01 벡터의 뜻
서로 같은 벡터

3 오른쪽 그림과 같은 정오각형에서 다음 벡터를 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

(2) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ED}+(-\overrightarrow{AC})$



02 벡터의 연산

4 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\vec{a}-\vec{x}=\vec{b}-2\vec{a}$

(2) $2(\vec{x}-3\vec{a})=9\vec{b}-\vec{x}$

02 벡터의 연산
벡터의 실수배

5 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않을 때, 두 벡터 $2\vec{a}-k\vec{b}$, $-4\vec{a}+6\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

02 벡터의 연산
벡터의 평행

중/단/원 기초

1

목표| 서로 크기가 같은 벡터를 찾을 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$, $\overrightarrow{\mathbf{DC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathbf{CA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$, $\overrightarrow{\mathbf{DB}}$

2

목표| 서로 같은 벡터를 찾아 주어진 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\vec{a}}$

(2) $-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{-\vec{b}}$

3

목표| 벡터의 덧셈의 연산법칙을 이용하여 벡터의 덧셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$

$=\overrightarrow{\mathbf{AE}}$

(2) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ED}+(-\overrightarrow{AC})$

$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})+\overrightarrow{DC}+(-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{AA}$

$=\vec{\mathbf{0}}$

4

목표| 벡터의 실수배의 성질을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{a}$이므로

$\boldsymbol{\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}}$

(2) $2\vec{x}-6\vec{a}=9\vec{b}-\vec{x}$에서

$3\vec{x}=6\vec{a}+9\vec{b}$이므로

$\boldsymbol{\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}}$

5

목표| 두 벡터가 서로 평행할 조건을 알게 한다.

풀이| 두 벡터 $2\vec{a}-k\vec{b}$, $-4\vec{a}+6\vec{b}$가 서로 평행하려면 $2\vec{a}-k\vec{b}=t(-4\vec{a}+6\vec{b})$를 만족시키는 실수 t가 존재하여야 한다.

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$2\vec{a}-k\vec{b}=-4t\vec{a}+6t\vec{b}$에서

$2=-4t$, $-k=6t$

따라서 $t=-\frac{1}{2}$이므로 구하는 실수 k의 값은 **3**이다.

중/단/원 기본

1

목표| 서로 같은 벡터의 뜻을 알게 한다.

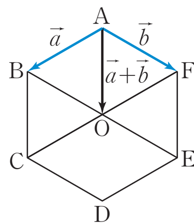
풀이| $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터는 $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$의 3개이다.

2

목표| 벡터의 덧셈의 연산법칙을 이용하여 주어진 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$
$=\vec{b}+(-\vec{a})$
$=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 두 대각선 BE, CF의 교점을 O라고 하면 사각형 ABOF는 평행사변형이므로

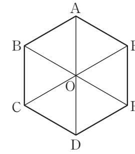


$\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$
$=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}$
$=\boldsymbol{2\vec{a}+\vec{b}}$

교과서 78 쪽

중단원 기본 [해답 p.209] 수준별 학습

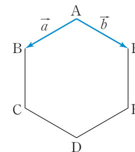
1 오른쪽 그림과 같은 정육각형에서 7개의 점 A, B, C, D, E, F, O를 시점과 종점으로 하는 벡터 중 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터의 개수를 구하여라. (단, 점 O는 세 대각선의 교점이다.)



01 벡터의 뜻 — 서로 같은 벡터

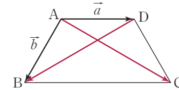
2 오른쪽 그림과 같은 정육각형에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$일 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{CE}$　　(2) $\overrightarrow{AC}$



02 벡터의 연산

3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$, $\overline{BC}=2\overline{AD}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



02 벡터의 연산

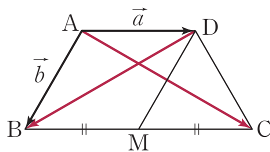
4 영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 평행이 아니고, 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$는 평행이다. 이때 $m(\vec{a}+6\vec{b})+2\vec{a}-4\vec{c}=\vec{0}$를 만족시키는 실수 m의 값을 구하여라.

02 벡터의 연산 — 벡터의 평행

3

목표| 벡터의 연산법칙을 이용하여 주어진 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BC}$의 중점을 M이라고 하면 $\overline{BC}=2\overline{AD}$이므로 사각형 ABMD는 평행사변형이 된다.



즉, $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}$이므로
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$
$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB})$
$=\vec{0}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}$
$=(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC})+\overrightarrow{AB}$
$=(\vec{b}+\vec{a})+\vec{b}$
$=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$

4

목표| 두 벡터가 서로 평행할 조건을 알게 한다.

풀이| 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$가 서로 평행하므로 $\vec{c}=t\vec{b}$를 만족시키는 실수 t가 존재하여야 한다.
$m(\vec{a}+6\vec{b})+2\vec{a}-4\vec{c}=\vec{0}$에서
$m(\vec{a}+6\vec{b})+2\vec{a}-4t\vec{b}=0$이므로
$(m+2)\vec{a}+(6m-4t)\vec{b}=\vec{0}$
이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로
$m+2=0$, $6m-4t=0$
따라서　$\boldsymbol{m=-2}$

교과서 79 쪽

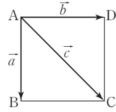
중단원 실력

[해답 p.209]

수준별 학습

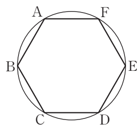
1 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$일 때, 다음 벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ (2) $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$



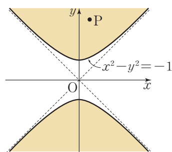
01 벡터의 뜻
02 벡터의 연산
벡터의 크기와 연산

2 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 정육각형에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=12$일 때, 정육각형의 한 변의 길이를 구하여라.



02 벡터의 연산

3 오른쪽 그림과 같이 색칠한 영역 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\vec{x}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$라고 하자. 이때 $\vec{x}$의 종점의 집합이 나타내는 도형의 길이를 구하여라.



02 벡터의 연산
벡터의 실수배

4 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여
$$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=k\vec{a}+3\vec{b}$$
일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.
(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

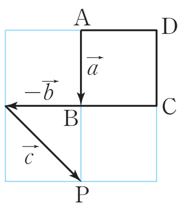
02 벡터의 연산
세 점이 한 직선 위에 있을 조건

중/단/원 실력

1

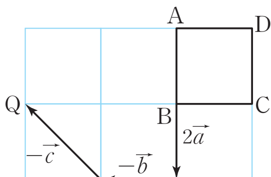
목표| 벡터를 나타내는 선분의 길이를 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)



$|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|\overrightarrow{AP}|=\mathbf{2}$

(2)

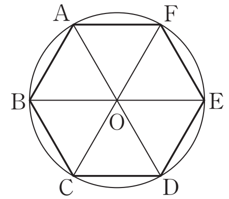


$|2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{5}$

2

목표| 정육각형에서 벡터의 덧셈의 연산법칙을 이용하여 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선의 교점을 O라고 하면 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AO}$ 이므로



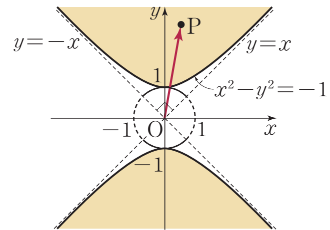
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=|6\overrightarrow{AO}|=12$

$|\overrightarrow{AO}|=2$이므로 정육각형의 한 변의 길이는 **2**이다.

3

목표| 단위벡터의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.

풀이|



$\vec{x}$의 종점을 A라고 하면 $\overrightarrow{OA}$는 $\overrightarrow{OP}$와 방향은 같고 크기가 1인 벡터이다.
쌍곡선 $x^2-y^2=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이므로 점 A는 y축을 기준으로 $\pm\dfrac{\pi}{4}$만큼의 범위에서 움직인다.
따라서 구하는 도형의 길이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\pi=\boldsymbol{\pi}$

4

목표| 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 알게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=(k-2)\vec{a}+2\vec{b}$
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$, 즉 $(k-2)\vec{a}+2\vec{b}=t(-\vec{a}-2\vec{b})$를 만족시키는 실수 t가 존재해야 한다.
이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로
$(k-2)\vec{a}+2\vec{b}=-t\vec{a}-2t\vec{b}$에서
$k-2=-t$, $2=-2t$
따라서 $t=-1$이므로 구하는 실수 k의 값은 **3**이다.

2 평면벡터의 성분과 내적

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해하게 한다.

② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.

③ 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 평면벡터의 성분	위치벡터의 뜻
	평면벡터의 성분
02 평면벡터의 내적	평면벡터의 내적
	두 평면벡터가 이루는 각의 크기
03 직선과 원의 방정식	좌표평면에서 벡터를 이용한 직선의 방정식
	좌표평면에서 두 직선이 이루는 각의 크기
	좌표평면에서 벡터를 이용한 원의 방정식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 80 쪽

2 평면벡터의 성분과 내적

그림자 극

그림자 극이란 스크린에 조명을 비추고 조명 앞에서 인형을 움직여 스크린에 나타난 인형의 그림자로 연기하는 인형극을 말한다. 이외에도 손을 이용하여 형상이 만들어지도록 하는 그림자 놀이, 빛을 비춘 스크린 위에 모래를 깔아 놓고 모래에 그림을 그려 장면을 만드는 모래 애니메이션도 그림자 극에 속한다.

그림자 극에 사용하는 인형은 빛이 투과되지 않도록 두꺼운 재질의 천이나 종이 등을 사용하는데, 인형의 실루엣만 나타나므로 일반적으로 색을 다양하게 사용하지 않고 하나의 색만 이용하여 인형을 만든다. 하지만 인형을 화려하게 만들기 위하여 인형의 일부분을 잘라낸 후, 그 잘라낸 부분에 셀로판과 같은 반투명 색지를 붙이기도 하고, 코팅한 후 유성 매직을 칠해서 색을 표현하기도 한다. 인형을 움직이기 위해서 보통 인형의 아랫부분에 투명한 아크릴 판을 잘라낸 막대를 붙여 사용하는데 종이 인형에 투명한 필름을 붙여 스크린 위에서 인형을 넣어 움직이는 형태로 사용하기도 한다.



들어가면서 이 단원에서는 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터를 성분으로 나타내는 방법과 평면벡터의 연산에 대하여 지도한다. 또 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구하는 것을 지도한다.
더 나아가 벡터가 수학뿐만 아니라 공학 및 의학 분야에 이르기까지 널리 응용되고 있음을 이해하도록 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.	상	위치벡터의 뜻을 이해하고, 평면벡터와 좌표의 대응을 설명할 수 있다.
	중	위치벡터의 뜻을 이해하고, 평면벡터를 성분으로 나타낼 수 있다.
	하	위치벡터의 뜻을 말할 수 있고, 시점이 원점인 평면벡터를 성분으로 나타낼 수 있다.
2. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	상	두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$와 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$가 같음을 이해하고, 두 평면벡터의 내적을 구할 수 있다.
	중	두 평면벡터의 내적의 뜻을 말할 수 있고, 두 평면벡터의 내적을 구할 수 있다.
	하	두 벡터의 크기와 이루는 각의 크기가 주어지거나 두 벡터의 성분이 주어진 두 평면벡터의 내적을 구할 수 있다.
3. 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.	상	좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	방향벡터의 뜻을 알고, 좌표평면에서 직선이 지나는 한 점과 방향벡터가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.
4. 좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있다.	상	좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있다.
	하	좌표평면에서 원의 중심과 반지름의 길이가 주어진 원의 방정식을 구할 수 있다.

교과서 81 쪽

01 평면벡터의 성분

● 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.

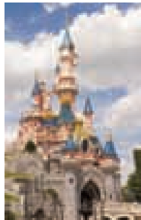
위치벡터란 무엇인가?

생각 열기

테마파크

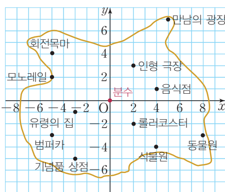
테마파크는 특정한 주제를 바탕으로 그 주제와 연속성을 가지는 환경, 놀이 시설, 이벤트 등을 기획하고 구성함으로써 방문객에게 감동과 즐거움을 제공하는 여가 활동 공간을 뜻한다. 테마파크의 기원은 1955년 미국 캘리포니아에 세워진 디즈니랜드라고 할 수 있다.

테마파크 사업은 지역 개발 효과, 기업과 지역의 이미지 향상 효과, 지역 주민의 고용 창출과 지역 경제 파급 효과 등을 기대할 수 있기 때문에 지역 경제 활성화를 위한 주요 수단으로서 각광을 받고 있다.



탐구 활동

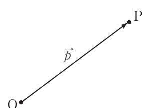
오른쪽 그림은 어느 테마파크의 분수를 좌표평면 위의 원점에 대응되도록 나타낸 안내도이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 분수가 있는 지점을 시점으로 하고 롤러코스터가 있는 지점을 종점으로 하는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.
2. 범퍼카가 있는 지점을 시점으로 하고 기념품 상점이 있는 지점을 종점으로 하는 벡터는 1에서 구한 벡터와 같은 벡터인가?
3. 테마파크 안의 시설물을 시점과 종점으로 하는 벡터 중에서 1에서 구한 벡터와 같은 벡터를 모두 찾아서 그림으로 나타내어 보자.

평면에서 한 점 O를 시점으로 정하면 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$는 오직 하나로 정해진다.

역으로 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$인 점 P의 위치도 오직 하나로 정해진다.



2. 정점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$를 점 O에 대한 점 A의 위치벡터라고 하는데 일반적으로 위치벡터의 시점은 원점임을 주지시킨다.

3. 선분의 내분점, 외분점의 위치벡터를 좌표평면에서의 내분점, 외분점의 좌표와 관련하여 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 위치벡터(position vector)
- 벡터의 성분(component of vector)

생각 열기 참/고/자/료

테마파크로서 디즈니랜드의 등장은 당시 유원지 중심의 레저 공간이 갖는 속성에 영화 및 공연 기능 등의 통일적인 테마를 중심으로 연출하여 사람들에게 보다 다양한 체험과 만족감을 주었다. 테마파크는 발전을 거듭하면서 전세계적으로 확산되었는데 최근에는 점점 휴양체재형의 확대와 가족중심화의 새로운 경향을 보인다.

01 평면벡터의 성분

소단원 지도 목표

① 위치벡터의 뜻을 알고, 위치벡터를 이용하여 선분의 내분점, 외분점의 위치벡터를 구할 수 있게 한다.

② 평면벡터의 성분의 뜻을 알고, 평면벡터를 성분으로 나타낼 수 있게 한다.

③ 평면벡터의 크기를 구할 수 있고, 두 평면벡터가 서로 같을 조건을 이해하게 한다.

④ 평면벡터의 성분을 이용하여 평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배의 계산을 할 수 있게 한다.

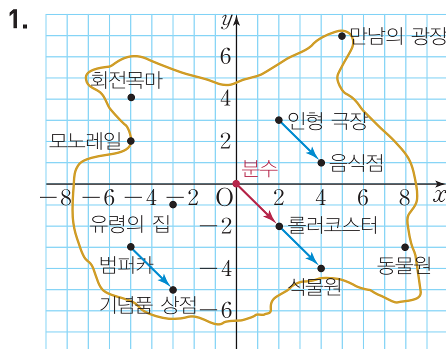
교수 · 학습상의 유의점

1. 평면벡터를 성분으로 표시하여 기하적 벡터를 대수적으로 나타내면 평면벡터의 연산이 편리해짐을 알게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 크기와 방향이 같은 벡터는 같은 벡터이므로 두 벡터가 같은 벡터인지 아닌지를 구분할 때는 시점의 위치와는 관계가 없음을 알게 하기 위한 것이다.

1.



2. 크기와 방향이 같으므로 **같은 벡터**이다.

3. 1에서 구한 벡터와 같은 벡터는 위의 그림의 파란색 선으로 표시된 벡터이다.

교과서 82 쪽

즉, 시점을 한 점 O로 정하면 평면 위의 한 점 P와 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 일대일 대응한다. 이때 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 **위치벡터**라고 한다. ❶ 일반적으로 위치벡터의 시점 O는 좌표평면의 원점으로 잡는다.

원점 O의 위치벡터는 영벡터 $\vec{0}$이다. 원점 O에 대한 점 A의 위치벡터를 간단히 점 A의 위치벡터라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 점 O에 대한 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$$

이므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 두 점 A, B의 위치벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

이다.

보기 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

$$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$
$$=(\vec{b}-\vec{a})+3(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=-\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$$

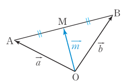
문제 1 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.

예제 01 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같음을 증명하여라.

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

❷ 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

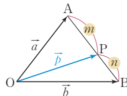


증명 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고, $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$이므로

$$\vec{p}=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$



교과서 83 쪽

문제 2 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$는 다음과 같음을 증명하여라.

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

문제 3 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 다음 점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q

예제 02 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는 다음과 같음을 증명하여라.

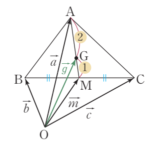
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

증명 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라고 하면 점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

또 무게중심 G는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

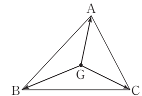
$$\vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\times\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



문제 4 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 무게중심을 G라고 할 때,

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

임을 증명하여라.



본문 해설

❶ 위치벡터의 시점은 어느 곳이든 정할 수 있으나 특별한 경우를 제외하고 원점을 시점으로 하는 위치벡터로 함으로써 좌표와 자연스럽게 연결되도록 한다.

1

목표| 벡터를 위치벡터로 표현할 수 있게 한다.

풀이| $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$

$=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$

$=2(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{b})+3(\vec{a}-\vec{c})=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}$

본문 해설

❷ 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 1 : 1로 내분하므로 점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은 $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

2

목표| 선분의 외분점의 위치벡터를 구할 수 있게 한다.

풀이| (i) $m>n$일 때,

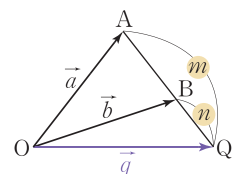
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고

$\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$이므로

$\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$이므로

$\vec{q}=\vec{a}+\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$



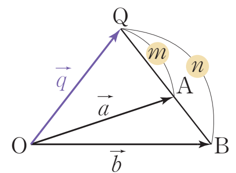
(ii) $m<n$일 때,

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$이고

$\overrightarrow{BQ}=\frac{m}{n-m}\overrightarrow{BA}$이므로

$\overrightarrow{BQ}=\frac{m}{n-m}(\vec{a}-\vec{b})$

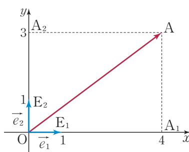
$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}$이므로



교과서 84 쪽

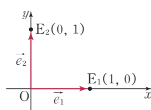
평면벡터의 성분이란 무엇인가?

탐구 활동 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$의 위치벡터를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$라 하고, 점 $A(4, 3)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, A_2라고 할 때, 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.



1. 두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$는 각각 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$와 평행하므로
$$\overrightarrow{OA_1}=\square\vec{e_1},\quad \overrightarrow{OA_2}=\square\vec{e_2}$$
2. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$이므로
$$\overrightarrow{OA}=\square\vec{e_1}+\square\vec{e_2}$$

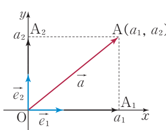
점 O를 원점으로 하는 좌표평면에서 두 점 $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$의 위치벡터 $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$를 각각 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타낸다.



● $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$이므로 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$는 단위벡터이다.

이제 좌표평면 위의 임의의 벡터를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타내어 보자.

❶ 임의의 평면벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1, a_2)$에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 $A_1(a_1, 0)$, $A_2(0, a_2)$라고 하면
$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$$
이고
$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$$
이므로
$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$
와 같이 나타낼 수 있다.



❷ 이때 실수 a_1, a_2를 **벡터 $\vec{a}$의 성분**이라 하고, a_1, a_2를 각각 벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분이라고 한다. 또 평면벡터 $\vec{a}$를 성분을 이용하여
$$\vec{a}=(a_1, a_2)$$
와 같이 나타낸다.

● $\vec{0}=(0, 0)$, $\vec{e_1}=(1, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1)$

$$\vec{q}=\vec{b}+\frac{m}{n-m}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

(i), (ii)에 의하여 $\vec{q}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

3

목표| 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{p}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{1+2}=\mathbf{\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}}$

(2) $\vec{q}=\dfrac{2\vec{b}-\vec{a}}{2-1}=\mathbf{-\vec{a}+2\vec{b}}$

4

목표| 삼각형의 무게중심의 위치벡터를 이용하여 도형의 성질을 증명할 수 있게 한다.

풀이| 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

무게중심 G의 위치벡터는 $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$이므로

$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}=\vec{a}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\vec{c}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

따라서 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 평면벡터의 성분은 그 시점을 원점에 고정시킨 후 종점을 좌표평면에 수직성분과 수평성분으로 나누어 나타내는 것임을 알게 하려는 것이다.

1. $\overrightarrow{OA_1}=\boxed{4}\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2}=\boxed{3}\vec{e_2}$

2. $\overrightarrow{OA}=\boxed{4}\vec{e_1}+\boxed{3}\vec{e_2}$

본문 해설

❶ 좌표평면 위에서 x축의 양의 방향과 같은 방향을 가지는 단위벡터를 $\vec{e_1}$, y축의 양의 방향과 같은 방향을 가지는 단위벡터를 $\vec{e_2}$로 나타낸다. 그러면 x축에 평행인 모든 벡터는 단위벡터 $\vec{e_1}$의 실수배로 나타낼 수 있고, y축에 평행인 모든 벡터는 단위벡터 $\vec{e_2}$의 실수배로 나타낼 수 있다.
또 모든 평면벡터는 두 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$의 실수배의 합으로 나타낼 수 있다.

❷ 점 A의 위치벡터를 성분으로 나타내면 점 A의 좌표가 된다. 즉, 좌표평면 위의 임의의 벡터는 두 개의 실수의 쌍으로 나타낼 수 있다. 또 두 개의 실수의 쌍은 한 개의 벡터를 나타낸다.
따라서 좌표평면 위의 두 개의 실수의 쌍은 점의 좌표라는 의미 외에 평면 위의 벡터의 성분이라는 의미가 포함됨을 알 수 있다. 이때 $\vec{a}=(a_1, a_2)$는 옳은 표현이지만 $\vec{a}(a_1, a_2)$는 잘못된 표현이다. 이와 반대로 좌표평면 위의 점 A에 대해서 $A(a_1, a_2)$는 옳은 표현이지만 $A=(a_1, a_2)$는 잘못된 표현이다.

5

목표| 평면벡터의 성분의 뜻을 알게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}=5\vec{e_1}-3\vec{e_2}=\mathbf{(5,\ -3)}$

(2) $\vec{b}=-2\vec{e_1}-0\cdot\vec{e_2}=\mathbf{(-2,\ 0)}$

교과서 85 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **평면벡터의 성분**
> 좌표평면 위의 점 $(a_1,\ a_2)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 하면
> $$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}=(a_1,\ a_2)$$

보기 좌표평면에서 원점 O에 대한 점 A$(4,\ 3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 하면

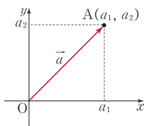
$$\vec{a}=4\vec{e_1}+3\vec{e_2}=(4,\ 3)$$

문제 5 다음 평면벡터를 성분으로 나타내어라. (단, $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$)

(1) $\vec{a}=5\vec{e_1}-3\vec{e_2}$ (2) $\vec{b}=-2\vec{e_1}$

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 A$(a_1,\ a_2)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때, $\vec{a}$를 성분으로 나타내면

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$



❶ 이다. 그런데 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같으므로

$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

이다.

❷ 또 좌표평면 위의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 서로 같을 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **평면벡터의 크기와 두 평면벡터가 서로 같을 조건**
> $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때
> (1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$
> (2) $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

보기 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ y)$이고 $\vec{a}=\vec{b}$이면

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

(2) $\vec{a}=\vec{b}$이므로 $x=-1,\ y=2$

본문 해설

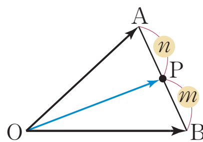
❶ 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$의 크기는 원점 O에서 종점 A까지의 거리이며, 피타고라스 정리를 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있다.

❷ 두 위치벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$는 시점이 일치하므로 두 벡터가 같기 위한 필요충분조건은 종점이 일치하여야 한다. 이때 종점의 좌표는 두 벡터의 성분과 같으므로 두 벡터가 같을 필요충분조건은 두 벡터의 성분이 같아야 한다.
즉, 두 위치벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$이면 $a_1=b_1,\ a_2=b_2$이고, $a_1=b_1,\ a_2=b_2$이면 $\vec{a}=\vec{b}$이다.

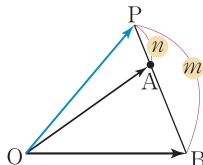
지/도/자/료

평행하지 않은 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$에 대하여 $m,\ n$의 조건에 따라 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 만족하는 점 P의 자취는 다음과 같다.

(1) $m\geq0,\ n\geq0$이고 $m+n=1$일 때
점 P는 선분 AB를 $n:m$으로 내분하는 점이다.

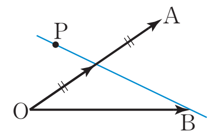


(2) $mn<0$이고 $m+n=1$일 때
점 P는 선분 AB를 $|n|:|m|$으로 외분하는 점이다.

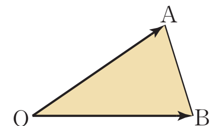


(3) $m+n=1$일 때
(1), (2)에서 점 P는 직선 AB 위의 점이다.

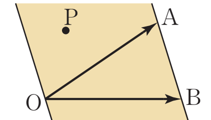
(4) $2m+n=1$일 때
점 P는 $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 종점을 잇는 직선 위의 점이다.



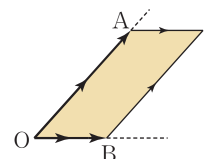
(5) $m\geq0,\ n\geq0$이고 $m+n\leq1$일 때
점 P는 △OAB의 내부 및 둘레에 있는 점이다.



(6) $0\leq m+n\leq1$일 때
점 P는 직선 AB와 점 O를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 사이에 있는 점이다.



(7) $0\leq m\leq1,\ 0\leq n\leq1$일 때
점 P는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부 및 둘레에 있는 점이다.



교과서 86 쪽

문제 6 다음 평면벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}=(2,\ 3)$ (2) $\vec{b}=(3,\ -4)$

문제 7 두 평면벡터 $\vec{a}=(2,\ 4+k)$, $\vec{b}=(l-3,\ 6)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, 실수 k, l의 값을 구하여라.

❶ 이제 평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 성분을 이용하여 계산하는 방법을 알아보자.

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$와 실수 k에 대하여

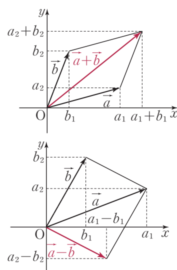
$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\quad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

이므로 벡터의 연산법칙에 의하여 다음이 성립한다.

[1] $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

[2] $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

[3] $k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})$
$=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}$
$=(ka_1,\ ka_2)$



이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **평면벡터의 성분에 의한 연산**

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(3) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

6

목표 | 성분으로 나타내어진 평면벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{\mathbf{13}}$

(2) $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\mathbf{5}$

7

목표 | 성분으로 나타내어진 두 평면벡터가 서로 같을 조건을 알게 한다.

풀이 | $l-3=2$에서 $l=\mathbf{5}$, $4+k=6$에서 $k=\mathbf{2}$이다.

본문 해설

❶ 평면벡터의 성분은 두 실수의 순서쌍으로 표시함으로써 벡터의 연산을 대수적으로 나타낼 수 있다. 이때 벡터의 연산법칙만을 이용하여 성분표시를 할 수 있으므로 연산법칙과 성분표시가 같은 개념임을 알 수 있다.

따라서 평면벡터의 덧셈은 각 성분끼리 덧셈을 한 값을 성분으로 하고, 평면벡터의 뺄셈은 각 성분끼리 뺄셈을 한 값을 성분으로 한다. 또 평면벡터의 실수배는 각 성분을 실수배한 것을 성분으로 한다.

❷ 평면벡터의 성분에 의한 연산을 이용하면 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 보이는 것도 간단하다.

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$라고 하자.

(1) 교환법칙

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$\vec{b}+\vec{a}=(b_1,\ b_2)+(a_1,\ a_2)$
$=(b_1+a_1,\ b_2+a_2)$

이므로 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

따라서 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

(2) 결합법칙

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\{(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)\}+(c_1,\ c_2)$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)+(c_1,\ c_2)$
$=(a_1+b_1+c_1,\ a_2+b_2+c_2)$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(a_1,\ a_2)+\{(b_1,\ b_2)+(c_1,\ c_2)\}$
$=(a_1,\ a_2)+(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$
$=(a_1+b_1+c_1,\ a_2+b_2+c_2)$

이므로 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

따라서 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

8

목표 | 평면벡터의 성분에 의한 연산을 할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$
$=2(1,\ 3)-3(-2,\ 1)+(5,\ -4)$
$=\mathbf{(13,\ -1)}$

(2) $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(-4\vec{a}+\vec{c})$
$=3\vec{a}-6\vec{b}-8\vec{a}+2\vec{c}$
$=-5\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}$
$=-5(1,\ 3)-6(-2,\ 1)+2(5,\ -4)$
$=\mathbf{(17,\ -29)}$

교과서 87 쪽

예제 03 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ 4)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내어라.

(1) $\vec{a}+3\vec{b}$ (2) $2(-\vec{a}+4\vec{b})$

풀이 (1) $\vec{a}+3\vec{b}=(-1,\ 2)+3(-3,\ 4)=(-1,\ 2)+(-9,\ 12)$
$=(-1+(-9),\ 2+12)=(-10,\ 14)$
(2) $2(-\vec{a}+4\vec{b})=-2\vec{a}+8\vec{b}=-2(-1,\ 2)+8(-3,\ 4)$
$=(2,\ -4)+(-24,\ 32)$
$=(2+(-24),\ -4+32)=(-22,\ 28)$

답 (1) $(-10,\ 14)$ (2) $(-22,\ 28)$

문제 8 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ 1)$, $\vec{c}=(5,\ -4)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내어라.

(1) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ (2) $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(-4\vec{a}+\vec{c})$

예제 04 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 4)$일 때, $\vec{c}=(-5,\ 10)$을 $k\vec{a}+l\vec{b}$의 꼴로 나타내어라.

풀이 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$라고 하면

$$(-5,\ 10)=k(2,\ -1)+l(-3,\ 4)=(2k,\ -k)+(-3l,\ 4l)=(2k-3l,\ -k+4l)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2k-3l=-5,\ -k+4l=10$$

두 식을 연립하여 풀면 $k=2$, $l=3$이므로 $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$

답 $2\vec{a}+3\vec{b}$

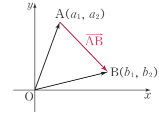
문제 9 $\vec{a}=(-3,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$일 때, $\vec{c}=(-4,\ 8)$을 $k\vec{a}+l\vec{b}$의 꼴로 나타내어라.

발전 **문제 10** $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$와 실수 t에 대하여 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$의 크기가 최소일 때, 실수 t의 값을 구하여라.

교과서 88 쪽

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하여 보자.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2)$이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내면



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

이고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기는

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점에 대한 평면벡터의 성분과 크기
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

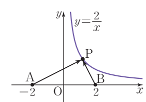
보기 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 3)$, $\mathrm{B}(-2,\ 5)$에 대하여
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2,\ 5)-(4,\ 3)=(-2-4,\ 5-3)=(-6,\ 2)$
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-6)^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

문제 11 다음 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 성분과 크기를 각각 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$ (2) $\mathrm{A}(2,\ -3)$, $\mathrm{B}(1,\ 5)$

창의 up

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$과 곡선 $y=\frac{2}{x}$ $(x>0)$ 위의 움직이는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최솟값을 구하는 방법을 설명하여라.



9

목표| 평면벡터를 서로 다른 두 벡터의 합으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$라고 하면

$(-4,\ 8)=k(-3,\ 2)+l(1,\ 2)=(-3k+l,\ 2k+2l)$

$-3k+l=-4,\ 2k+2l=8$

두 식을 연립하여 풀면 $k=2$, $l=2$이므로

$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}+2\vec{b}}$

10

목표| 평면벡터를 서로 다른 두 벡터의 합으로 나타내어 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(t+3,\ 2t+1)$

$|\vec{c}|=\sqrt{(t+3)^2+(2t+1)^2}=\sqrt{5t^2+10t+10}$

$=\sqrt{5(t+1)^2+5}$

따라서 벡터 $\vec{c}$의 크기가 최소가 되는 실수 t의 값은 $\mathbf{-1}$이다.

11

목표| 시점이 원점이 아닌 평면벡터의 성분과 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 1)-(-1,\ 2)=\mathbf{(3,\ -1)}$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 5)-(2,\ -3)=\mathbf{(-1,\ 8)}$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+8^2}=\boldsymbol{\sqrt{65}}$

창의 UP

출제 의도| 시점이 원점이 아닌 평면벡터의 크기를 구하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(2t,\ \frac{4}{t}\right)$, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\sqrt{4t^2+\frac{16}{t^2}}$

이때 $t^2>0$이므로 $4t^2+\frac{16}{t^2}\ge 2\sqrt{4t^2\times\frac{16}{t^2}}=16$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최솟값은 $\sqrt{16}=\mathbf{4}$이다.

교과서 89 쪽

02 평면벡터의 내적

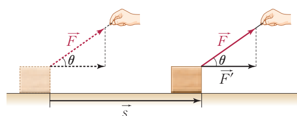
● 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

평면벡터의 내적이란 무엇인가?

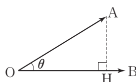
생각 열기 **힘이 한 일**

일상생활에서는 방을 청소하거나 설거지를 하는 등 체력을 소모하는 모든 활동을 일이라고 말한다. 하지만 과학에서는 물체에 힘이 작용하여 물체가 움직일 때 일을 했다고 표현하며, 이동 방향으로 작용한 힘의 크기와 물체의 이동 거리의 곱으로 정의한다.

예를 들어 이동 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 방향으로 힘 $\vec{F}$를 작용하여 $|\vec{s}|$만큼 물체를 이동할 때, 물체가 이동하는 방향으로 작용한 힘 $\vec{F'}$의 크기는 $|\vec{F'}|=|\vec{F}|\cos\theta$이다. 이때 힘 $\vec{F}$가 한 일은 $|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$이다.



탐구 활동 **오른쪽 그림에서 물체에 작용하는 힘을 나타내는 벡터를 $\overrightarrow{OA}$, 물체의 이동 경로를 나타내는 벡터를 $\overrightarrow{OB}$라고 하자. 각 AOB의 크기를 θ라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

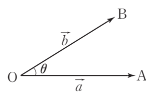


1. 물체의 이동 방향으로 작용한 힘 $\overrightarrow{OH}$의 크기를 $\overrightarrow{OA}$와 θ를 이용하여 나타내어 보자.
2. 힘 $\overrightarrow{OA}$가 한 일을 $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$, θ를 이용하여 나타내어 보자.

평면에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$인 세 점 O, A, B를 정할 때,

$$\angle AOB=\theta\ (0\le\theta\le\pi)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.



교수 · 학습상의 유의점

1. 평면벡터의 내적은 활용 범위가 넓으므로 그 성질과 계산 방법을 철저히 지도하도록 한다.
2. 평면벡터의 내적의 기하학적 의미를 이해시키고, 평면벡터의 내적은 벡터가 아닌 스칼라임을 이해하도록 지도한다.
3. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적은 반드시 $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 나타내어야 하며, $\vec{a}\vec{b}$ 또는 $\vec{a}\times\vec{b}$로 나타내지 않도록 유의시킨다.
4. 평면벡터의 수직 · 평행 조건은 두 평면벡터가 이루는 각의 크기 및 평면벡터의 내적을 이용하여 구할 수 있음을 강조한다.

새로 나온 용어와 기호

- 내적(內積, inner product)
- $\vec{a}\cdot\vec{b}$

02 평면벡터의 내적

소단원 지도 목표

① 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
② 삼각형의 성질을 이용하여 평면벡터의 내적을 성분으로 나타낼 수 있게 한다.
③ 평면벡터의 내적의 연산법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
④ 평면벡터의 내적을 이용하여 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.
⑤ 평면벡터의 내적과 수직 · 평행 조건 사이의 관계를 이해하게 한다.

생각 열기 참/고/자/료

일상생활에서 일은 사람이 체력을 소모하여 하는 모든 활동을 말한다. 하지만 물리적으로는 물체에 일정한 힘 F를 가하여 그 힘의 방향으로 거리 s만큼 이동시켰을 때 작용한 힘은 물체에 $W=Fs$만큼의 일을 했다고 말한다. 이때 일의 단위로는 J(줄), erg(에르그) 등을 쓴다.

탐구 활동의 이해

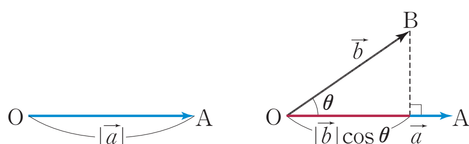
활동 목표 • 물체를 당기는 힘의 방향과 물체가 이동하는 방향이 이루는 각의 크기 사이에 어떤 관계가 있는지를 이용하여 벡터의 내적의 이해에 도움이 되도록 한다.

1. $|\overrightarrow{OA}|\cos\theta$

2. $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$

본문 해설

❶ 내적이란 벡터의 방향요소를 제외하고 크기만을 곱하여 결과가 스칼라가 되는 연산을 말한다. 즉, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아니고 실수이다.
이때 내적은 두 벡터의 크기를 단순히 곱해 주는 것이 아니라 한쪽을 기준으로 잡았을 때, 다른 한쪽의 크기를 곱하는 것이다.
예를 들어 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터 $\vec{a}$의 크기와 벡터 $\vec{b}$의 벡터 $\vec{a}$ 위로 수선의 발을 내려 그 크기를 곱한 것이다.



❷ $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 영벡터는 방향이 없으므로 각을 정의할 수 없지만 $|\vec{a}|=0$ 또는 $|\vec{b}|=0$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 따로 정의한다.

❸ $\vec{a}=\vec{b}$이면 두 벡터가 이루는 각의 크기 $\theta=0$이고 $\cos\theta=1$이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\vec{a}\cdot\vec{a}\\&=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta\\&=|\vec{a}|^2\end{aligned}$$

교과서 90 쪽

❶ 이때

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**이라 하고, 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다.

❷ $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❸ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

> **평면벡터의 내적**
> 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0\le\theta\le\pi)$일 때
> $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

예제 01 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하여라.

(1) 0　(2) $\frac{\pi}{3}$　(3) $\frac{\pi}{2}$　(4) $\frac{2}{3}\pi$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아니라 실수이다.

풀이 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos 0=6$　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=3$

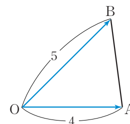
(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos\frac{\pi}{2}=0$　(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi=-3$

답 (1) 6　(2) 3　(3) 0　(4) -3

문제 1 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하여라.

(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{\pi}{4}$　(3) $\frac{5}{6}\pi$　(4) π

발전 **문제 2** 오른쪽 그림과 같은 예각삼각형 OAB에서 $|\overrightarrow{OA}|=4$, $|\overrightarrow{OB}|=5$이고 넓이는 $5\sqrt{2}$일 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 값을 구하여라.



1

목표| 평면벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4\times\cos\frac{\pi}{6}=3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{6\sqrt{3}}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4\times\cos\frac{\pi}{4}=3\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{6\sqrt{2}}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4\times\cos\frac{5}{6}\pi=3\times4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathbf{-6\sqrt{3}}$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4\times\cos\pi=3\times4\times(-1)=\mathbf{-12}$

2

목표| 삼각형에서 평면벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 삼각형 OAB의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$이므로

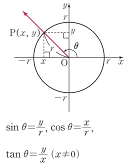
$5\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin\theta$에서　$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 θ는 예각이므로　$\theta=\frac{\pi}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=4\times5\times\cos\frac{\pi}{4}\\&=4\times5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\mathbf{10\sqrt{2}}\end{aligned}$$

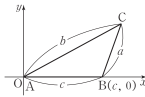
삼각함수의 정의



$\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}\,(x\neq0)$

삼각형 ABC를 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓았을 때, 삼각함수의 정의에 의하여 점 C의 좌표는

$$\mathrm{C}(b\cos A,\ b\sin A)$$



이므로

$$a^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$$
$$=(c-b\cos A)^2+(0-b\sin A)^2$$
$$=c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A$$
$$=c^2-2bc\cos A+b^2(\cos^2 A+\sin^2 A)$$

이다. 그런데 $\cos^2 A+\sin^2 A=1$이므로

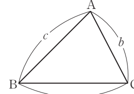
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

가 성립한다. 이와 같은 방법으로

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

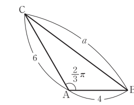
가 성립함을 알 수 있다.

즉, 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 다음과 같은 성질이 성립한다.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

보기 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 a의 값을 구하면

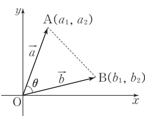


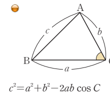
$$a^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\frac{2}{3}\pi=76$$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

이제 삼각형의 성질을 이용하여 평면벡터의 내적을 성분으로 나타내어 보자.

오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라고 하자.





$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

이때 삼각형 OAB에서

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$$

가 성립한다. 여기서

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$
$$\overline{\mathrm{OA}}^2=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2$$
$$\overline{\mathrm{OB}}^2=|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2$$

이므로

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$$

이다. 즉,

$$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

이고

$$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **평면벡터의 내적과 성분**

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

보기 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,\ 3)$일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+2\times3=4$

$\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$일 때 $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=1\times0+0\times1=0$

문제 3 다음 두 평면벡터의 내적을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(-2,\ -4)$ (2) $\vec{a}=(-1,\ 1)$, $\vec{b}=(4,\ 5)$

문제 4 두 평면벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(k,\ 6)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

본문 해설

❶ 평면벡터의 내적을 두 벡터 사이의 각을 사용하지 않고 성분으로 나타낼 수 있다.

3

목표| 성분으로 나타내어진 평면벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-2)+(-2)\times(-4)=\mathbf{2}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times4+1\times5=\mathbf{1}$

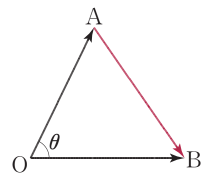
4

목표| 성분으로 나타내어진 평면벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times k+(-1)\times6=2k-6$

$2k-6=0$이므로 $k=\mathbf{3}$

지/도/자/료 삼각형을 이용한 내적의 의미



△AOB에서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$라고 할 때, 코사인법칙에 의하여

$$|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이므로

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

이다. 이때

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \iff |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2>|\vec{c}|^2 \iff \angle\mathrm{AOB}<90^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2 \iff \angle\mathrm{AOB}=90^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \iff |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2<|\vec{c}|^2 \iff \angle\mathrm{AOB}>90^\circ$

따라서 내적은 두 벡터가 이루는 각의 크기를 90°와 비교할 수 있는 척도가 된다.

교과서 93 쪽

평면벡터의 내적에 대한 연산법칙을 알아보자.

세 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$에 대하여

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=a_1b_1+a_2b_2\\&=b_1a_1+b_2a_2\\&=\vec{b}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

가 성립한다.

또

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2),\ \vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$$

이므로 다음이 성립함도 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=(a_1b_1+a_1c_1)+(a_2b_2+a_2c_2)\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2\\&=(a_1c_1+b_1c_1)+(a_2c_2+b_2c_2)\\&=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

한편 임의의 실수 k에 대하여

$$\begin{aligned}(k\vec{a})\cdot\vec{b}&=(ka_1,\ ka_2)\cdot(b_1,\ b_2)\\&=(ka_1)b_1+(ka_2)b_2\\&=k(a_1b_1+a_2b_2)=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

가 성립하고, 이와 같은 방법으로

❶ $$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

가 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적의 연산법칙

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

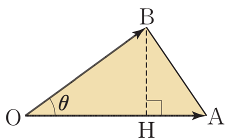
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (결합법칙)

본문 해설

❶ $$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(k\vec{b})&=(a_1,\ a_2)\cdot(kb_1,\ kb_2)\\&=a_1(kb_1)+a_2(kb_2)\\&=k(a_1b_1+a_2b_2)\\&=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

지/도/자/료 삼각형의 넓이



삼각형 OAB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 점 B에서 변 OA(또는 변 OA의 연장선) 위에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\overline{BH}=\overline{OB}\sin\theta=|\vec{b}|\sin\theta$이므로 삼각형 OAB의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times|\vec{a}|\times|\vec{b}|\sin\theta$$

이다. 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\\&=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)\\&=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta)\\&=\frac{1}{4}\{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\}\end{aligned}$$

이므로

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

이다. 이때 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$라고 하면

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2&=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\\&=(a_1b_2-a_2b_1)^2\end{aligned}$$

이므로

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

이다.

읽/기/자/료 벡터의 내적 기호의 역사적 배경

그라스만(Grassmann, H. G ; 1809~1877)은 두 벡터 ρ, ρ'의 내적 또는 스칼라 곱을 $S_{\rho\rho'}$으로 표현하였다. 1888년 페아노(Peano, G. ; 1858~1932)는 두 벡터 u와 v의 내적을 나타내는 기호로 $u|v$를 사용하기도 하였다. 1902년 기브스(Gibbs, J. W. ; 1839~1903)는 윌슨(Wilson)에 의하여 출판된 "벡터해석"이라는 책에서 처음으로 점곱(dot product)라는 용어와 함께 $u\cdot v$로 표현하였다.

교과서 94 쪽

예제 02 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

증명 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

문제 5 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ (2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

예제 03 두 평면벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$이고 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, $3\vec{a}-2\vec{b}$의 크기를 구하여라.

풀이 $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{b}|^2$
$=9\times1^2-12\times1\times2\times\frac{1}{2}+4\times2^2=13$

따라서 $3\vec{a}-2\vec{b}$의 크기는 $|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{13}$이다. 답 $\sqrt{13}$

문제 6 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, $\vec{a}-2\vec{b}$의 크기를 구하여라.

두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

❶ 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0\le\theta\le\pi)$라고 하면 내적의 정의에 의하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

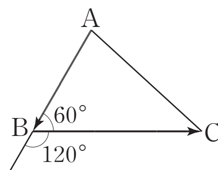
이다.

본문 해설

❶ 영벡터가 아닌 두 평면벡터의 성분이 주어지면 벡터의 크기와 내적을 구할 수 있으므로 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

이때 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ는 두 벡터의 시점을 일치시킬 때, 두 반직선이 이루는 각의 크기이다.

이를 테면 오른쪽 그림에서 두 직선 AB, BC가 이루는 각의 크기는 60° 또는 120°이지만 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터의 시점을 일치시켜야 하므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점이 점 B가 되도록 평행이동해 보면 120°임을 알 수 있다.



5

목표| 벡터의 연산법칙을 이용하여 등식이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

6

목표| 벡터의 내적을 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$
$=9-4\times2+4\times2=9$

따라서 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\mathbf{3}$

지/도/자/료 부등식 $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$의 증명

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\le|\vec{a}||\vec{b}|$

이다. 이때

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$
$\le|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2$
$=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

이고 $|\vec{a}+\vec{b}|\ge0$, $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge0$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

이다. (단, 등호는 두 벡터가 평행할 때 성립한다.)

7

목표| 성분으로 나타내어진 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

(1) $\cos\theta=\dfrac{2\times3+2\times(-3)}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{3^2+(-3)^2}}=0$이므로

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\cos\theta=\dfrac{0\times(-1)+1\times\sqrt{3}}{\sqrt{0^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

8

목표| 평면벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$

$1=1-2\times1\times1\times\cos\theta+1$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

교과서 95 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 평면벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$일 때

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

보기 두 평면벡터 $\vec{a}=(1, -2)$, $\vec{b}=(1, 3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{1\times1+(-2)\times3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+3^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

문제 7 다음 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구하여라.

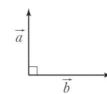
(1) $\vec{a}=(2, 2)$, $\vec{b}=(3, -3)$ (2) $\vec{a}=(0, 1)$, $\vec{b}=(-1, \sqrt{3})$

발전 **문제 8** 크기가 각각 1인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$을 만족시킬 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하여라.

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$일 때, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이라 하고, 기호로

$$\vec{a}\perp\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



한편 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이면

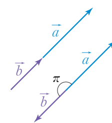
❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

이고, 그 역도 성립한다.

또 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 같을 때 $\theta=0$이고, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 반대일 때 $\theta=\pi$이므로

❷ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

이고, 그 역도 성립한다.



본문 해설

❶ 두 평면벡터의 수직 조건

$\vec{a}\ne\vec{0}$, $\vec{b}\ne\vec{0}$에 대하여

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때

$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\iff(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2)=0$

$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$

여기서 $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$임을 증명하여 보자.

(i) $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$이고,

$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

따라서 $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다.

(ii) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$이면 $\cos\theta=0$이므로

$0\le\theta\le\pi$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이면 $\vec{a}\perp\vec{b}$이다.

(i), (ii)에서 $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

❷ 두 평면벡터의 평행 조건

$\vec{a}\ne0$, $\vec{b}\ne0$에 대하여

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

$\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적과 수직 · 평행 조건

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

(1) 수직 조건: $\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(2) 평행 조건: $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

예제 04 두 평면벡터 $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(x, 4)$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$　　(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여
$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

풀이 (1) $\vec{a}\perp\vec{b}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서　$-x+8=0$, $x=8$

(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$에서　$-x+8=\pm\sqrt{5}\sqrt{x^2+16}$

양변을 제곱하여 정리하면　$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$

따라서　$x=-2$

답 (1) 8　(2) -2

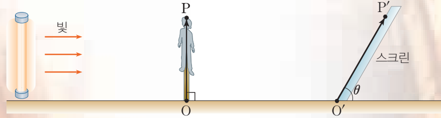
문제 9 두 평면벡터 $\vec{a}=(3, 2)$, $\vec{b}=(x, 6)$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$　　(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

다음과 같이 조명 앞에서 바닥에 수직으로 서 있는 그림자 인형이 있다. 이 인형의 막대 끝에 있는 점 O에서 머리의 점 P까지 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 성분은 $(0, 3\sqrt{3})$이라고 할 때, 바닥으로부터 θ만큼 기울어진 스크린에 비추어진 인형의 그림자의 벡터 $\overrightarrow{O'P'}$의 성분은 $(3, 3\sqrt{3})$이다. 이때 스크린이 기울어진 각도 θ를 구하여라. (단, 빛은 그림자 인형의 벡터에 수직이다.)



9

목표| 평면벡터의 내적과 수직 · 평행 조건을 알게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}\perp\vec{b}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

$3x+12=0$

따라서　$x=\mathbf{-4}$

(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$에서

$3x+12=\pm\sqrt{13}\sqrt{x^2+36}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-18x+81=0$, $(x-9)^2=0$

따라서　$x=\mathbf{9}$

여기서 $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$임을 증명하여 보자.

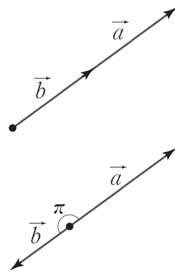
(i) $\vec{a}/\!/\vec{b}$이고 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 같은 방향이면 $\theta=0$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0=|\vec{a}||\vec{b}|$

$\vec{a}/\!/\vec{b}$이고 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 반대 방향이면 $\theta=\pi$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\pi$

$=-|\vec{a}||\vec{b}|$



따라서 $\vec{a}/\!/\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$이다.

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|$이면

$\cos\theta=1$이므로 $0\le\theta\le\pi$에서　$\theta=0$

$\vec{a}$, $\vec{b}$는 같은 방향이므로 두 벡터는 서로 평행하다.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-|\vec{a}||\vec{b}|$이면

$\cos\theta=-1$이므로 $0\le\theta\le\pi$에서　$\theta=\pi$

$\vec{a}$, $\vec{b}$는 반대 방향이므로 두 벡터는 서로 평행하다.

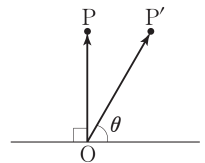
(i), (ii)에서　$\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

단원 과제

목표| 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 벡터 $\overrightarrow{O'P'}$의 시점을 같게 하여 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{O'P'}$의 시점을 같게 하면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $\overrightarrow{OP'}$이 바닥과 이루는 각의 크기는 θ이므로 두 벡터가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다. 따라서



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{O'P'}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{O'P'}|}=\frac{27}{3\sqrt{3}\times 6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로　$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

03 직선과 원의 방정식

소단원 지도 목표

① 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 좌표평면에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 좌표평면에서 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식이 직선의 매개변수 표현임을 이해하게 한다.
2. 좌표평면에서 직선의 법선벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식이 직선의 음함수 표현임을 이해하게 한다.
3. 벡터방정식 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.
4. 방향벡터의 성분에 0이 포함되는 경우에도 직선의 방정식을 구할 수 있도록 예를 통하여 간단히 이해하게 한다.
5. 두 직선이 이루는 각은 두 직선의 방향벡터가 이루는 각임을 인식시킨다.

교과서 97 쪽

03 직선과 원의 방정식

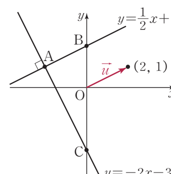
● 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.

좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 수직인 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=-2x-3$에 대하여 두 직선의 교점을 A, 각 직선이 y축과 만나는 점을 각각 B, C라고 하자. 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$ 위의 벡터 $\overrightarrow{AB}$, 직선 $y=-2x-3$ 위의 벡터 $\overrightarrow{AC}$와 벡터 $\vec{u}=(2,\ 1)$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 벡터 $\vec{u}$와 어떤 관계인지 말하여 보자.
2. 벡터 $\overrightarrow{AC}$는 벡터 $\vec{u}$와 어떤 관계인지 말하여 보자.

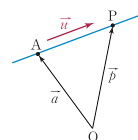


좌표평면 위의 한 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(a,\ b)$에 평행한 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

❶ 오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면 $\overrightarrow{AP}/\!/\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$$

를 만족시키는 실수 t가 존재한다.



● $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}=t\vec{b}$ (단, t는 0이 아닌 실수)

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$$

이므로 $\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u}$에서

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

● ①을 직선 l의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 실수 t의 값이 변함에 따라 점 A를 지나고, 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 직선 l을 나타낸다.

이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 **방향벡터**라고 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 방향벡터(direction vector)
• 법선벡터(normal vector)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 좌표평면에서 두 점을 지나는 직선의 방정식을 기울기의 개념이 아닌 방향벡터의 개념을 도입하여 구하는 방법을 소개하기 위한 것이다.

1. $\overrightarrow{AB}$는 $\vec{u}$와 평행하다.
2. $\overrightarrow{AC}$는 $\vec{u}$와 수직이다.

본문 해설

❶ 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 위의 임의의 점 P에 대하여
$\overrightarrow{AP}/\!/\vec{u}$, 즉 $\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$이므로
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\vec{u}$에서 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}$
인 실수 t가 존재한다.
매개변수 t는 임의의 실수이고, t의 값의 변화에 따라 직선의 모든 점을 나타낸다.
또 직선의 방정식
$x=x_1+at$, $y=y_1+bt$
꼴은 직선과 다른 도형의 방정식을 연립할 때 사용된다.

❶ 이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

직선 l의 방향벡터가 $\vec{u}=(a,\ b)$이고, $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$이므로 ①은

$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(a,\ b)=(x_1+at,\ y_1+bt)$$

이다. 따라서 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

● ②를 직선 l의 매개변수방정식이라 하고, t를 매개변수라고 한다. 즉, 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식은 직선의 매개변수 표현이다.

여기서 $ab\neq0$일 때, ②에서 t를 소거하면 다음과 같은 직선 l의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}$$

한편 $ab=0$일 때, ②에서 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

$a=0$, $b\neq0$일 때 직선 l의 방정식은

$$x=x_1$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축과 평행한 직선을 나타낸다.

또 $a\neq0$, $b=0$일 때 직선 l의 방정식은

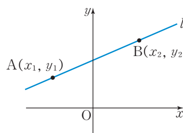
$$y=y_1$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축과 평행한 직선을 나타낸다.

❷ 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선 l의 방향벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$$

이고, 이 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 다음과 같다.



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면에서 직선의 방정식 [1]

(1) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a,\ b)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\ (\text{단, } ab\neq0)$$

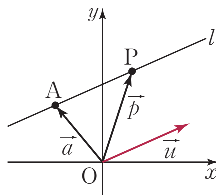
(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

본문 해설

❶ 좌표평면에서 한 점을 지나며 주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식을 구하여 보자.

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(a,\ b)$에 평행한 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 다음이 성립한다.



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$ (단, t는 실수)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라고 하면

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$

이것을 성분을 이용하여 나타내면

$(x,\ y)=(x_1+at,\ y_1+bt)$

이므로 $x=x_1+at$, $y=y_1+bt$

여기서 $ab\neq0$일 때 t를 소거하면

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \quad \cdots\cdots ①$$

한편 ①을 변형하면 $y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1)$이 되고, 이것은 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나며 기울기가 $\frac{b}{a}$인 직선의 방정식이다.

❷ 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여 보자.

직선 l은 점 A를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$인 직선이므로 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 다음이 성립한다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (단, t는 실수)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라고 하면

$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$

이것을 성분을 이용하여 나타내면

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(x_1,\ y_1)+t(x_2-x_1,\ y_2-y_1)\\&=((1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)y_1+ty_2)\end{aligned}$$

이므로 $x=(1-t)x_1+tx_2$,

$y=(1-t)y_1+ty_2$

여기서 $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$일 때 t를 소거하면

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

를 얻을 수 있다.

또 $x_1\neq x_2$, $y_1=y_2$이면 구하는 직선의 방정식은

$y=y_1$

지/도/자/료 공간좌표에서의 직선의 방정식

한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$에 평행한 직선 l의 벡터방정식 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$(t는 실수)를 성분을 이용하여 나타내면 $(x,\ y,\ z)=(x_1,\ y_1,\ z_1)+t(a,\ b,\ c)$

두 벡터가 서로 같은 조건에 의하여

$$\begin{cases} x=x_1+ta \\ y=y_1+tb \\ z=z_1+tc \end{cases} \text{에서}$$

(i) $abc\neq0$일 때, t를 소거하면

직선의 방정식은 $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$

(ii) $abc=0$일 때

$a=0$이고 $bc\neq0$일 때의 직선의 방정식은

$x=x_1$, $\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$

$a=0$, $b=0$이고 $c\neq0$일 때와 같이 방향벡터 중의 두 성분이 0이면 직선의 방정식은 $x=x_1$, $y=y_1$로 나타낸다.

1

목표| 한 점과 방향벡터가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-(-1)}{3}$이므로

$\boldsymbol{\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3}}$

(2) $\boldsymbol{x=-1}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 방향벡터는

$(-4-2,\ 1-1)=(-6,\ 0)$이므로

$\boldsymbol{y=1}$

2

목표| 한 점을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 직선의 방향벡터는

$\vec{u}=(1,\ -3)$이다.

따라서 구하는 직선은 점 $\mathrm{A}(6,\ -2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(1,\ -3)$인 직선이므로

$\frac{x-6}{1}=\frac{y-(-2)}{-3}$에서

$\boldsymbol{x-6=\frac{y+2}{-3}}$

(2) 주어진 직선의 방정식은 $\frac{x-1}{2}=-y$이므로 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ -1)$이다.

따라서 구하는 직선은 점 $\mathrm{A}(6,\ -2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(2,\ -1)$인 직선이므로

$\frac{x-6}{2}=\frac{y-(-2)}{-1}$에서

$\boldsymbol{\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{-1}}$

교과서 99 쪽

보기 (1) 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(2,\ -3)$에 평행한 직선의 방정식은

$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-3}$

(2) 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$를 지나고, 벡터 $\vec{u}=(4,\ 0)$에 평행한 직선의 방정식은

$y=-2$

(3) 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -4)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-(-4)}{1-(-4)}$ 이므로 $\frac{x+1}{3}=\frac{y+4}{5}$

문제 1 좌표평면에서 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(-5,\ 3)$인 직선

(2) 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(0,\ 2)$인 직선

(3) 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(-4,\ 1)$을 지나는 직선

예제 01 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(3,\ -7)$을 지나고, 직선 $\frac{x-1}{6}=\frac{y+5}{-3}$와 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(6,\ -3)$이다.

따라서 구하는 직선은 점 $\mathrm{A}(3,\ -7)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(6,\ -3)$인 직선이므로

$\frac{x-3}{6}=\frac{y+7}{-3}$

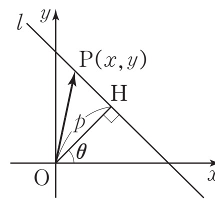
답 $\frac{x-3}{6}=\frac{y+7}{-3}$

문제 2 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(6,\ -2)$를 지나고, 다음 직선과 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $x+2=\frac{y-2}{-3}$

(2) $x=1+2t,\ y=-t$ (단, t는 실수)

지/도/자/료 직선의 방정식(Hesse의 표준형)



원점 O에서 직선 l에 내린 수선 OH의 길이를 p라 하고, x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라고 하면 직선 l 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(p\cos\theta,\ p\sin\theta)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}}=0$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}})=0$

$(p\cos\theta,\ p\sin\theta)\cdot(x-p\cos\theta,\ y-p\sin\theta)=0$

$p\cos\theta(x-p\cos\theta)+p\sin\theta(y-p\sin\theta)=0$

$x\cos\theta-p\cos^2\theta+y\sin\theta-p\sin^2\theta=0$

$x\cos\theta+y\sin\theta=p(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

따라서 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$

이것을 직선 l의 Hesse의 표준형이라고 한다.

교과서 100 쪽

좌표평면 위의 한 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$에 수직인 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라 고 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$이므로

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$$

이다.

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

역으로 ①을 만족시키면서 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 직선 l을 나타낸다.

이때 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 **법선벡터**라고 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

직선 l의 법선벡터가 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$이고, $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1)$$

이고, 이것을 ①에 대입하면

$$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(n_1,\ n_2)=0$$

이므로 내적의 정의에 의하여 다음과 같은 직선 l의 방정식을 얻는다.

$$n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)=0$$

법선벡터를 이용하여 나타낸 직선의 방정식은 직선의 방정식을 음함수로 나타낸 것이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **좌표평면에서 직선의 방정식 [2]**
> 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$에 수직인 직선의 방정식은
> $$n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)=0$$

보기 좌표평면에서 점 $A(1,\ 2)$를 지나고, 벡터 $\vec{n}=(2,\ -3)$에 수직인 직선의 방정식은 $2(x-1)-3(y-2)=0$이므로 $2x-3y+4=0$

문제 3 좌표평면에서 점 $A(3,\ 1)$을 지나고, 법선벡터가 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $\vec{n}=(1,\ 2)$ (2) $\vec{n}=(0,\ -1)$

3

목표| 한 점과 법선벡터가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1\times(x-3)+2(y-1)=0$이므로

$\boldsymbol{x+2y-5=0}$

(2) $0\times(x-3)-1\times(y-1)=0$이므로

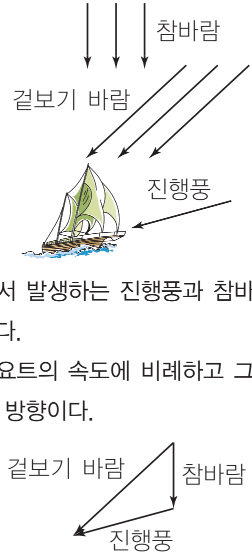
$\boldsymbol{y=1}$

읽/기/자/료

올림픽 종목으로도 채택된 요트 경기는 별다른 동력 없이 바람으로만 요트를 조정하여 정해진 코스를 완주하는 경기이다.

우리는 정지 상태에서 느끼는 바람과 움직이고 있을 때 느끼는 바람은 그 방향과 세기가 다르다는 것을 알 수 있다. 이동 중인 요트도 마찬가지로 정지 상태의 요트에서 느끼는 바람의 방향과 세기와 다르다.

이때 정지 상태에서 느끼는 바람을 참바람(true wind)이라고 하며 이동시 느끼는 바람을 겉보기 바람(apparent wind)이라고 한다. 겉보기 바람은 요트의 속도에 의해서 발생하는 진행풍과 참바람의 합성 형태로 나타난다.



진행풍의 세기는 달리는 요트의 속도에 비례하고 그 요트의 진행 방향은 반대 방향이다.

이를 이용하여 겉보기 바람의 세기와 방향을 구하려면 오른쪽 그림과 같이 참바람 방향으로 그 세기에 비례하는 크기의 화살표를 그리고, 그 화살표의 종점에서 요트의 진행 방향과 반대 방향으로 요트 속도에 비례하는 크기의 화살표(진행풍)를 그린다. 그리고 참바람의 시점에서 진행풍의 종점을 연결하는 화살표를 그리면 겉보기 바람의 세기와 방향을 구할 수 있다.

이때 겉보기 바람이 한 일의 양을 계산하려면 벡터의 내적을 이용해야 한다.

4

목표 | 한 점을 지나고 주어진 직선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 구하는 직선은 직선 $\frac{2-x}{2}=\frac{y}{3}$에 수직이므로 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(-2,\ 3)$에 수직이다.

즉, 벡터 $\vec{u}$는 직선의 법선벡터이다.

따라서 점 $\mathrm{A}(3,\ -4)$를 지나고, 법선벡터가 $(-2,\ 3)$인 직선의 방정식은

$-2(x-3)+3(y+4)=0$이므로

$\boldsymbol{2x-3y-18=0}$

(2) 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지나는 직선은

$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{0-1}$이므로 $\quad x=\frac{y-1}{-1}$

구하는 직선은 직선 $x=\frac{y-1}{-1}$에 수직이므로 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ -1)$에 수직이다.

즉, 벡터 $\vec{u}$는 직선의 법선벡터이다.

따라서 점 $\mathrm{A}(3,\ -4)$를 지나고, 법선벡터가 $(1,\ -1)$인 직선의 방정식은

$(x-3)-(y+4)=0$이므로

$\boldsymbol{x-y-7=0}$

교과서 101 쪽

예제 02 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$을 지나고, 직선 $\frac{x-1}{3}=5-y$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 직선은 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{-1}$에 수직이므로 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 수직이다. 즉, 벡터 $\vec{u}$는 직선의 법선벡터이다.

따라서 점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$을 지나고, 법선벡터가 $(3,\ -1)$인 직선의 방정식은

$3(x+2)-(y-3)=0$이므로 $\quad 3x-y+9=0$

답 $3x-y+9=0$

문제 4 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(3,\ -4)$를 지나고, 다음 직선과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $\frac{2-x}{2}=\frac{y}{3}$

(2) 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지나는 직선

좌표평면에서 두 직선이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 좌표평면 위의 두 직선 l_1, l_2가 다음과 같을 때, 물음에 답하여 보자.

$$l_1:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{2},\quad l_2:\ \frac{x-1}{2}=y+5$$

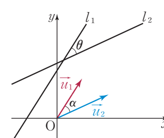
1. 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 할 때, 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기를 구하여 보자.

2. 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 구하는 방법을 말하여 보자.

방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2)$인 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기를 α라고 할 때, θ는 α와 $\pi-\alpha$ 중에서 크지 않은 쪽이다.

이때 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=|\vec{u_1}||\vec{u_2}|\cos\alpha$이므로 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$



두 직선이 이루는 각의 크기 θ는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 방법과 같다.

이때 두 직선이 이루는 각은 직각이 아닌 경우 예각을 두 직선이 이루는 각이라고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 방향벡터가 이루는 각의 크기를 구하여 보고 이를 통해 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 방법을 생각해 보게 하려는 것이다.

1. $\vec{u_1}=(-1,\ 2)$, $\vec{u_2}=(2,\ 1)$

이고 두 벡터가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{-1\times2+2\times1}{\sqrt{(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2}}=0$$

이므로 $\quad \theta=\frac{\pi}{2}$

2. 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기는 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기와 같다.

5

목표 | 두 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각

$\vec{u_1}=(\sqrt{3},\ 1)$, $\vec{u_2}=(1,\ \sqrt{3})$

이므로 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|\sqrt{3}\times1+1\times\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\quad \theta=\frac{\pi}{6}$

교과서 102 쪽

예제 03 좌표평면에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x-2}{3}=y+1,\ l_2:\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}$$

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(3,\ 1)$, $\vec{u_2}=(2,\ -1)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|3\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$이다.

답 $\frac{\pi}{4}$

문제 5 좌표평면에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x-1}{\sqrt{3}}=y+3,\ l_2:\ x+1=\frac{y-2}{\sqrt{3}}$$

이제 좌표평면에서 두 직선이 평행할 조건과 수직일 조건에 대하여 알아보자.

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때, 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.

또 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

이상에서 다음을 알 수 있다.

❶ **좌표평면에서 두 직선의 평행 · 수직 조건**

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2)$일 때

(1) 평행 조건: $l_1 /\!/ l_2 \iff \vec{u_1}=t\vec{u_2}$ (단, t는 0이 아닌 실수)

$\iff a_1 : b_1=a_2 : b_2$

(2) 수직 조건: $l_1 \perp l_2 \iff \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$

$\iff a_1a_2+b_1b_2=0$

서로 다른 두 직선
$l_1:\ y=mx+n$,
$l_2:\ y=m'x+n'$
$(m\neq0,\ m'\neq0)$
에 대하여
(1) $l_1 /\!/ l_2 \iff m=m',\ n\neq n'$
(2) $l_1\perp l_2 \iff mm'=-1$

교과서 103 쪽

예제 04 좌표평면에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{2-x}{3}=\frac{y-1}{k},\quad l_2:\ x=\frac{y}{-3}$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.
(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(-3,\ k)$, $\vec{u_2}=(1,\ -3)$이므로

(1) $l_1 /\!/ l_2$일 때, $\frac{-3}{1}=\frac{k}{-3}$이므로 $k=9$

(2) $l_1\perp l_2$일 때, $-3\times1+k\times(-3)=0$이므로 $k=-1$

답 (1) 9 (2) -1

문제 6 좌표평면에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{6},\ l_2:\ \frac{x+1}{k}=-y$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.
(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

창의 up

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$에서 직선 $\frac{x-1}{2}=3-y$에 내린 수선의 발 H의 좌표와 선분 AH의 길이를 구하는 방법을 설명하여라.

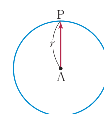
좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 어떻게 구하는가?

좌표평면에서 중심이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 원주 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r$이므로 $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=r$ 즉,

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

이다.



본문 해설

❶ 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2)$일 때

(1) 평행 조건

$l_1 /\!/ l_2$이면 $\vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$이므로 $\vec{u_1}=t\vec{u_2}$인 실수 $t(t\neq0)$가 존재한다. 즉

$(a_1,\ b_1)=t(a_2,\ b_2)$

$a_1=ta_2$, $b_1=tb_2$이므로 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$

따라서 $l_1 /\!/ l_2 \iff \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$

(2) 수직 조건

$l_1\perp l_2$이면 $\vec{u_1}\perp\vec{u_2}$이므로

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=|\vec{u_1}||\vec{u_2}|\cos\frac{\pi}{2}=0$이다. 즉

$(a_1,\ b_1)\cdot(a_2,\ b_2)=a_1a_2+b_1b_2=0$

따라서 $l_1\perp l_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0$

6

목표| 두 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(2,\ 6)$, $\vec{u_2}=(k,\ -1)$이므로

(1) $l_1 /\!/ l_2$일 때, $\frac{2}{k}=\frac{6}{-1}$이므로 $k=-\frac{1}{3}$

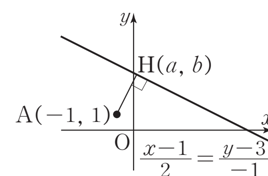
(2) $l_1\perp l_2$일 때, $2k-6=0$이므로 $k=3$

창의 UP

출제 의도| 좌표평면 위에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 점 H의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 점 H는 직선 위의 점이므로

$\frac{a-1}{2}=\frac{b-3}{-1}$에서



$a+2b=7$ ······ ①

직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ -1)$이고,

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$에서

$(a+1,\ b-1)\cdot(2,\ -1)=0$

$2a-b=-3$ ······ ②

①, ②에서 $a=\frac{1}{5},\ b=\frac{17}{5}$이므로

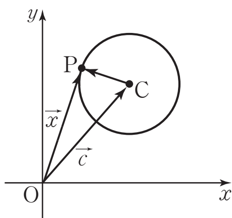
$H\left(\frac{1}{5},\ \frac{17}{5}\right)$

한편 $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$이므로

$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\mathbf{\frac{6\sqrt{5}}{5}}$

본문 해설

❶ 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구하는 방법을 알아보자. 오른쪽 그림과 같이 중심이 $C(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면



$|\overrightarrow{CP}|=r$

$\overrightarrow{OC}=\vec{c},\ \overrightarrow{OP}=\vec{x}$라고 하면

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}$이므로 $|\vec{x}-\vec{c}|=r$

$|\vec{x}-\vec{c}|^2=r^2$에서 $(\vec{x}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{c})=r^2$

이때 $\vec{x}-\vec{c}=(x-a,\ y-b)$이므로

$(x-a,\ y-b)\cdot(x-a,\ y-b)=r^2$에서

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

7

목표| 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{5})^2$

따라서 $\mathbf{(x+2)^2+(y-3)^2=5}$

(2) $(x-1)(x-7)+(y-5)(y+3)=0$

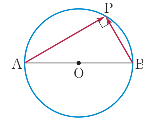
$x^2-8x+7+y^2-2y-15=0$

따라서 $\mathbf{(x-4)^2+(y-1)^2=25}$

교과서 104 쪽

또 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 원주 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로



$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **좌표평면에서 원의 방정식**

(1) 점 $A(x_1,\ y_1)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

(2) 두 점 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

예제 05 좌표평면에서 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $A(-3,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

(2) 두 점 $A(1,\ 4),\ B(3,\ -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원

풀이 (1) $(x+3)^2+(y-2)^2=3^2$

따라서 $(x+3)^2+(y-2)^2=9$이다.

(2) $(x-1)(x-3)+(y-4)(y+2)=0$

$x^2-4x+3+y^2-2y-8=0$

따라서 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$이다.

답 (1) $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ (2) $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

문제 7 좌표평면에서 다음 원의 방정식을 구하여라.

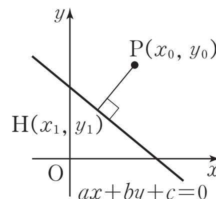
(1) 중심이 점 $A(-2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원

(2) 두 점 $A(1,\ 5),\ B(7,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원

지/도/자/료 좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리

좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리를 벡터를 이용하여 구할 수 있다.

평면 위의 한 점 $P(x_0,\ y_0)$에서 직선 $ax+by+c=0$에 내린 수선의 발을 $H(x_1,\ y_1)$이라고 하면



$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0)$

이고, 직선의 법선벡터 $\vec{n}=(a,\ b)$와 $\overrightarrow{PH}$는 평행하므로

$(x_1-x_0,\ y_1-y_0)=t(a,\ b)$(단, t는 실수)

즉, $x_1=x_0+at,\ y_1=y_0+bt$

한편 점 H는 직선 위의 점이므로 $ax_1+by_1+c=0$

$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0$

$t=\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$이므로

$$|\overrightarrow{PH}|=|t|\sqrt{a^2+b^2}=\left|\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

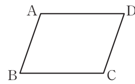
교과서 105 쪽

중단원 기초

[해답 p.211]

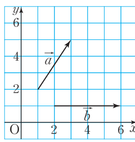
수준별 학습

1 네 점 A, B, C, D의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$라 고 하자. 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $\vec{d}$를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$로 나타내어라.



01 평면벡터의 성분
위치벡터

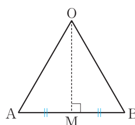
2 오른쪽 그림과 같은 두 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}$를 성분을 이용하여 나타내고, 그 크기를 구하여라.



01 평면벡터의 성분
평면벡터의 성분과 크기

3 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 OAB에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$
(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$
(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$



02 평면벡터의 내적

4 다음 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(3,\ 2),\ \vec{b}=(-4,\ 6)$
(2) $\vec{a}=(1,\ 3),\ \vec{b}=(2,\ -1)$

02 평면벡터의 내적
두 평면벡터가 이루는 각의 크기

5 좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{k+1}$, $\frac{x-1}{k}=-y$가 수직이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

03 직선과 원의 방정식
두 직선의 수직 조건

중/단/원 기초

1

목표| 평행사변형의 성질을 위치벡터로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 사각형 ABCD가 평행사변형이므로
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
이것을 위치벡터로 나타내면
$\vec{d}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$이므로
$\vec{d}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}$

2

목표| 평면벡터의 성분과 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\vec{a}=\mathbf{(2,\ 3)}$이므로
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$
$\vec{b}=\mathbf{(4,\ 0)}$이므로
$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+0^2}=\mathbf{4}$

3

목표| 평면벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기는 60°이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos 60^\circ$
$=1\times1\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|^2=\mathbf{1}$

(3) $|\overrightarrow{OM}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$이 이루는 각의 크기는 30°이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos 30^\circ$
$=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\mathbf{\frac{3}{4}}$

(4) $|\overrightarrow{AB}|=1$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 120°이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1\times\cos 120^\circ$
$=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

4

목표| 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

(1) $\cos\theta=\frac{3\times(-4)+2\times6}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{(-4)^2+6^2}}=\mathbf{0}$

(2) $\cos\theta=\frac{1\times2+3\times(-1)}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{5\sqrt{2}}=\mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{10}}$

5

목표| 두 직선의 수직 조건을 알게 한다.

풀이| 두 직선의 방향벡터가 각각
$\vec{u_1}=(2,\ k+1)$, $\vec{u_2}=(k,\ -1)$이다.
$\vec{u_1}\perp\vec{u_2}$이므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$에서
$2k-(k+1)=0$
따라서 $k=1$

중/단/원 기본

1

목표| 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$이다.

또 점 N은 선분 OM을 3 : 1로 외분하는 점이므로

$\overrightarrow{ON}=\frac{3\overrightarrow{OM}-1\times\vec{0}}{3-1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OM}$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

따라서

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)-\vec{a}$

$=\mathbf{-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}}$

2

목표| 평면벡터의 내적을 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다.

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{b}|^2$

$(2\sqrt{3})^2=|\vec{a}|^2-4|\vec{a}|\times1\times\frac{1}{2}+4\times1^2$

$|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|-8=0$, $(|\vec{a}|-4)(|\vec{a}|+2)=0$

따라서 $|\vec{a}|\geq0$이어야 하므로 $|\vec{a}|=\mathbf{4}$

3

목표| 평면벡터의 수직 조건을 알게 한다.

풀이| $\vec{a}+k\vec{b}=(3,\ 6)+k(1,\ -1)=(k+3,\ -k+6)$

$(\vec{a}+k\vec{b})\perp\vec{c}$이므로 $(\vec{a}+k\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

$(k+3)\times1+(-k+6)\times2=0$, $-k+15=0$

따라서 $k=\mathbf{15}$

교과서 106 쪽

중단원 기본

[해답 p.212]

수준별 학습

1 삼각형 OAB에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. 선분 AB의 중점을 M, 선분 OM을 3 : 1로 외분하는 점을 N이라고 할 때, $\overrightarrow{AN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

01 평면벡터의 성분
선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

2 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{3}$일 때, $|\vec{a}|$의 값을 구하여라.

02 평면벡터의 내적

3 세 평면벡터 $\vec{a}=(3,\ 6)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$, $\vec{c}=(1,\ 2)$에 대하여 $\vec{a}+k\vec{b}$와 $\vec{c}$가 수직일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

02 평면벡터의 내적
평면벡터의 수직 조건

4 좌표평면에서 점 A(3, −4)를 지나고 직선 $2x-y+4=0$에 평행한 직선을 매개변수 방정식으로 나타내어라.

03 직선과 원의 방정식
직선의 방정식

5 좌표평면에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

l_1: $\frac{x-2}{3}=\frac{5-y}{4}$, l_2: $\frac{x+3}{7}=1-y$

03 직선과 원의 방정식
두 직선이 이루는 각의 크기

4

목표| 한 점을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $2x-y+4=0$에서 $x+2=\frac{y}{2}$

따라서 구하는 직선은 점 A(3, −4)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1,\ 2)$이므로 $x-3=\frac{y+4}{2}$

이 직선을 매개변수 방정식으로 나타내면 $\begin{cases}\mathbf{x=t+3}\\ \mathbf{y=2t-4}\end{cases}$

5

목표| 두 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각

$\vec{u_1}=(3,\ -4)$, $\vec{u_2}=(7,\ -1)$이므로

$\cos\theta=\frac{|3\times7+(-4)\times(-1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

중단원 실력

[해답 p.212]

수준별 학습

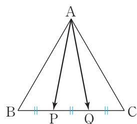
1 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 $5\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$일 때, 삼각형 PAB, PBC, PCA의 넓이의 비를 구하여라.

01 평면벡터의 성분 — 선분의 내분점

2 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(2, 1)과 직선 $y=x-2$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값을 구하여라.

01 평면벡터의 성분 — 평면벡터의 크기

3 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다. 변 BC를 삼등분하는 점을 P, Q라고 할 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값을 구하여라.



02 평면벡터의 내적 — 평면벡터의 내적의 성질

4 좌표평면 위의 세 직선 l_1, l_2, l_3에 대하여 $l_1 /\!/ l_2$이고, $l_2 \perp l_3$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

$$l_1: x+2=\frac{y-1}{2},\ l_2: \frac{x-2}{a}=\frac{y-5}{4},\ l_3: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{b}$$

03 직선과 원의 방정식 — 두 직선의 평행 · 수직 조건

5 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=6$ 위의 두 점 A$(-1, \sqrt{5})$, B(a, b)에서의 두 접선이 서로 수직일 때, ab의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

03 직선과 원의 방정식 — 원의 방정식

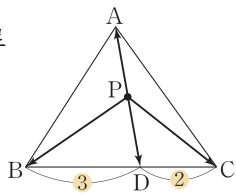
중/단/원 실력

1

목표| 선분의 내분점의 위치벡터를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{PA}=-\dfrac{3\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PB}}{3+2}$이므로

선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점을 D라고 하면 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DP}$이므로 점 P는 선분 AD의 중점이다.



$\triangle PAB=\frac{1}{2}\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\triangle ABC=\frac{3}{10}\triangle ABC$

$\triangle PBC=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$\triangle PCA=\frac{1}{2}\triangle ADC=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\triangle ABC=\frac{1}{5}\triangle ABC$

따라서 △PAB, △PBC, △PCA의 넓이의 비는

$\frac{3}{10} : \frac{1}{2} : \frac{1}{5}=\mathbf{3 : 5 : 2}$

2

목표| 평면벡터의 성분을 이용하여 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 $(x, x-2)$라고 하면

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=(2x-3,\ 2x-5)$

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(2x-3)^2+(2x-5)^2}$

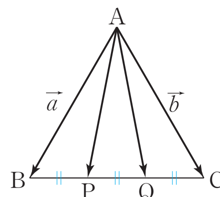
$=\sqrt{8(x-2)^2+2}$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은 $x=2$일 때 $\mathbf{\sqrt{2}}$이다.

3

목표| 평면벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면



$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{9}{2}$

한편 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\mathbf{\frac{13}{2}}$

4

목표| 두 직선의 평행 · 수직 조건을 알게 한다.

풀이| 세 직선 l_1, l_2, l_3의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(1, 2)$, $\vec{u_2}=(a, 4)$, $\vec{u_3}=(2, b)$이다.

$l_1 /\!/ l_2$이므로 $\frac{a}{1}=\frac{4}{2}$에서 $a=\mathbf{2}$

$l_2 \perp l_3$이므로 $2a+4b=0$에서 $b=\mathbf{-1}$

5

목표| 두 직선의 수직 조건을 알게 한다.

풀이| 두 접선의 법선벡터는 $\overrightarrow{OA}=(-1, \sqrt{5})$, $\overrightarrow{OB}=(a, b)$이고 두 접선이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$이다.

$(-1, \sqrt{5})\cdot(a, b)=-a+\sqrt{5}b=0$, $a=\sqrt{5}b$

이때 점 B는 원 위의 점이므로 $a^2+b^2=6$에서

$5b^2+b^2=6$이므로 $b=1$, $a=\sqrt{5}$

따라서 $ab=\mathbf{\sqrt{5}}$

3 평면 운동

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 속도와 가속도	미분법을 이용하여 속도와 가속도 구하기
02 속도와 거리	정적분을 이용하여 수직선 위를 움직인 거리 구하기
	정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리 구하기
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

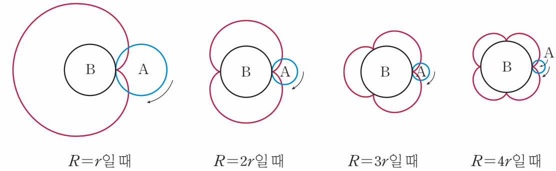
교과서 108 쪽

3 평면 운동

에피사이클로이드(epicycloid)

사이클로이드(cycloid)란 직선을 따라 원이 굴러서 회전할 때 원주상의 한 점이 그리는 곡선이다. 이때 원이 직선 위가 아니라 다른 원 위를 굴러서 회전하면 사이클로이드와는 다른 모습의 곡선이 나타난다. 원 A가 고정된 원 B의 바깥쪽을 굴러서 회전할 때, 원 A 위의 한 점이 그리는 곡선을 에피사이클로이드라고 한다.

고정된 원 B의 반지름의 길이 R와 둘레를 굴러 가는 원 A의 반지름의 길이 r 사이의 관계에 따라 곡선의 형태가 달라지는데, 각각의 경우에 대한 에피사이클로이드는 다음과 같다.



$R=r$일 때 $R=2r$일 때 $R=3r$일 때 $R=4r$일 때

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 116 쪽

에피사이클로이드와 같은 여러 가지 곡선의 길이를 구할 수 있을까?

들어가면서 이 단원에서는 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 물체의 속도와 가속도와 시간에 대한 속도 함수를 이용하여 거리 등을 구하는 것을 지도한다. 또 정적분을 이용하여 수직선과 평면 위를 움직인 거리를 구하는 것을 다룬다. 이를 이용하여 물리학, 통계학 등 우리 생활 주변에서 발생되는 많은 문제를 해결할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.	상	미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	중	미분법을 이용하여 속도나 가속도를 나타내는 함수가 주어지거나 문제 상황이 단순한 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	하	속도와 가속도의 관계를 말할 수 있다.
2. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.	상	정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	중	정적분을 이용하여 속도와 거리의 관계를 파악하고, 속도나 거리를 나타내는 함수가 주어지거나 문제 상황이 단순한 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	하	속도를 나타내는 함수와 위치를 나타내는 함수 사이의 관계를 말할 수 있다.

교과서 109 쪽

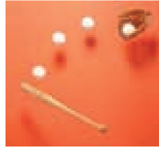
01 속도와 가속도

● 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

미분법을 이용하여 속도와 가속도를 어떻게 구하는가?

생각 열기 **포물선 운동**

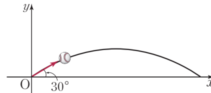
지면으로부터 일정한 각도로 던진 물체는 포물선 운동을 한다. 이때 수평 방향으로는 등속 운동을 하고 연직 방향으로는 중력을 받아 등가속도 운동을 한다. 대포에서 쏜 포탄이나 야구 방망이에 맞은 야구공의 운동이 그러한 예이다.



탐구 활동 오른쪽 그림과 같이 초속 20 m로 수평면과 30°의 각을 이루도록 야구공을 던졌다. t초 후의 야구공의 수평 방향으로의 위치 x가

$x=20\cos 30^\circ\times t$

라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 위치를 구하여 보자.
2. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 속도를 구하여 보자.
3. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 가속도를 구하여 보자.

미적분Ⅰ 위치와 속도, 가속도의 관계: 위치 ↓미분 속도 ↓미분 가속도

❶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타내어질 때, 시각 t에서 점 P의 속도 v와 가속도 a는 각각 다음과 같이 정의한다.

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t),\ a=\frac{dv}{dt}=f''(t)$$

탐구 활동에서 초속 20 m로 수평면과 30°의 각을 이루도록 던진 야구공의 수평 방향으로의 속도와 가속도는 각각 다음과 같다.

$$\text{속도: }\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(20\cos 30^\circ\times t)=20\cos 30^\circ=10\sqrt{3}\,(\text{m/s})$$

$$\text{가속도: }\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(10\sqrt{3})=0\,(\text{m/s}^2)$$

01 속도와 가속도

소단원 지도 목표

① 미분계수의 뜻을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도의 뜻을 이해하게 한다.
② 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

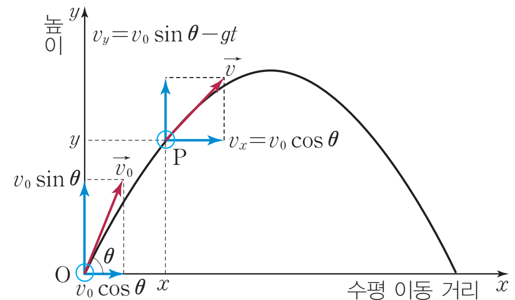
1. 평면 운동을 벡터로 나타내어 속도, 가속도를 구할 수 있게 한다.

2. 속도는 평균변화율과 순간변화율을 연관지어 직관적으로 이해하게 한다.

3. 가속도는 속도의 순간변화율을 생각하여 정의함을 이해하게 한다.

생각 열기 참/고/자/료

수평면과 θ의 각으로 던져 올린 물체의 운동을 분석해 보면 수평 방향으로는 등속 운동을 하고 연직 방향으로는 연직 위로 던져 올린 물체의 운동과 같음을 알 수 있다.
이때 수평 도달 거리가 최대가 되려면 $\theta=45^\circ$가 되면 된다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 위치와 속도, 가속도 사이의 관계, 즉 위치를 미분하면 속도가 되고, 속도를 미분하면 가속도가 된다는 것을 알게 하기 위한 것이다.

1. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 위치는
$x=20\cos 30^\circ\times 3=\mathbf{30\sqrt{3}(m)}$

2. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 속도는
$\frac{dx}{dt}=20\cos 30^\circ=\mathbf{10\sqrt{3}(m/s)}$

3. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 가속도는
$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(10\sqrt{3})=\mathbf{0(m/s^2)}$

본문 해설

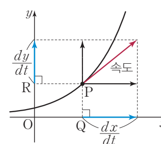
❶ 속도는 위치의 순간변화율이며 방향과 크기를 동시에 갖는 양이므로 크기만을 갖는 속력과는 구별된다. 이때 가속도는 속도의 순간변화율이므로 방향을 가진 양이다.

교과서 110 쪽

이제 평면 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 알아보자.

❶ 점 P가 좌표평면 위를 움직일 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 $(x,\ y)$라고 하면 x, y는 각각 시각 t의 함수이므로 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 점 P의 속도와 가속도를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 하면 점 P의 움직임에 따라 점 Q는 x축 위에서 $x=f(t)$로 나타내어지는 직선 운동을 하고, 점 R는 y축 위에서 $y=g(t)$로 나타내어지는 직선 운동을 한다.



따라서 시각 t에서 두 점 Q, R의 속도는 각각

$$\frac{dx}{dt}=f'(t),\ \frac{dy}{dt}=g'(t)$$

이다.

이때 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 x성분, y성분으로 하는 벡터

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

를 점 P의 속도라 하고, 벡터 $\vec{v}$의 크기

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

을 점 P의 속도의 크기, 즉 속력이라고 한다.

또 시각 t에서 두 점 Q, R의 가속도는 각각

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t),\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}=g''(t)$$

이다.

이때 $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$을 각각 x성분, y성분으로 하는 벡터

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

을 점 P의 가속도라 하고, 벡터 $\vec{a}$의 크기

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

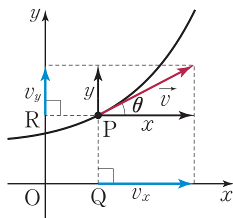
을 점 P의 가속도의 크기라고 한다.

본문 해설

❶ 점 P의 x축 방향의 속도를 v_x, y축 방향의 속도를 v_y라고 하면 좌표평면 위의 점 P의 속도 $\vec{v}$의 크기

$$|\vec{v}|=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

을 점 P의 속력이라고 한다.



또 속도 $\vec{v}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$v_x=|\vec{v}|\cos\theta$, $v_y=|\vec{v}|\sin\theta$이므로

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}\left(\text{단, } \frac{dx}{dt}\neq 0\right)$$

따라서 속도 $\vec{v}$의 방향은 점 P가 그리는 곡선의 접선 방향과 일치한다.

한편 시각 t에서의 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$, 시각 t에서의 점 Q의 x축의 방향의 가속도를 a_x, 점 R의 y축의 방향의 가속도를 a_y라고 하면

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

이때 가속도 $\vec{a}$의 크기는 다음과 같다.

$$|\vec{a}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

또 가속도 $|\vec{a}|$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 φ라고 하면

$a_x=|\vec{a}|\cos\varphi$, $a_y=|\vec{a}|\sin\varphi$

$$\tan\varphi=\frac{a_y}{a_x}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\text{단, } \frac{d^2x}{dt^2}\neq 0\right)$$

지/도/자/료

수직선 위를 움직이는 시각 t에서의 점 P의 x좌표가 $x=f(t)$로 나타내어질 때

$$\text{속도: } \frac{dx}{dt}=f'(t),\ \text{가속도: } \frac{dv}{dt}=f''(t)$$

(1) ① $f'(t)>0$이면 점 P는 수직선 위를 속력 $|f'(t)|$로 양의 방향으로 움직인다.

② $f'(t)<0$이면 점 P는 수직선 위를 속력 $|f'(t)|$로 음의 방향으로 움직인다.

③ $f'(t)=0$이면 점 P는 움직이는 방향을 바꾸거나 정지한다.

(2) $f''(t)>0$이면 $f'(t)$는 감소하는 상태이다.

(3) $f''(t)<0$이면 $f'(t)$는 증가하는 상태이다.

(4) $f''(t)=0$이면 $f'(t)$는 변화가 없는 상태이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때,

(1) 속도 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(f'(t), g'(t))$

속력 $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

(2) 가속도 $\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t), g''(t))$

가속도의 크기 $|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

예제 01 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=2t,\ y=t^2+t$$

일 때, 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t+1$이므로 $\vec{v}=(2, 2t+1)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 $\vec{a}=(0, 2)$

답 속도: $(2, 2t+1)$, 가속도: $(0, 2)$

문제 1 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 다음과 같을 때, 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

(1) $x=t^2$, $y=t^3-2t$

(2) $x=4\cos\frac{\pi}{3}t$, $y=4\sin\frac{\pi}{3}t$

(3) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$



문제 2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도

(2) 시각 $t=2$에서 점 P의 속력과 가속도의 크기

1

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-2$이므로

$\vec{v}=(2t,\ 3t^2-2)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로

$\vec{a}=(2,\ 6t)$

(2) $\frac{dx}{dt}=-\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t$이므로

$\vec{v}=\left(-\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t,\ \frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{3}t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{4\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t$이므로

$\vec{a}=\left(-\frac{4\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{3}t,\ -\frac{4\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right)$

(3) $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로

$\vec{v}=(1-\cos t,\ \sin t)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\cos t$이므로

$\vec{a}=(\sin t,\ \cos t)$

2

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도, 속력과 가속도의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$,

$\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$이므로

$\vec{v}=(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\sin t+\cos t))$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-2e^t\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2e^t\cos t$이므로

$\vec{a}=(-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t)$

(2) $|\vec{v}|$

$=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t-\cos t)^2}$

$=e^t\sqrt{2\cos^2 t+2\sin^2 t}$

$=\sqrt{2}e^t$

이므로 $t=2$일 때 속력은 $\sqrt{2}e^2$

$|\vec{a}|=\sqrt{4e^{2t}\sin^2 t+4e^{2t}\cos^2 t}$

$=2e^t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=2e^t$

이므로 $t=2$일 때 가속도의 크기는 $2e^2$

지/도/자/료

속도가 0인 경우

① 어떤 물체가 운동을 멈출 때

② 어떤 물체가 운동 방향을 바꿀 때

③ 수직 운동을 하는 물체가 최고점에 도달할 때

02 속도와 거리

소단원 지도 목표

① 정적분을 이용하여 수직선 위를 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

② 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 평면 운동을 벡터로 나타내어 이동 거리를 구할 수 있게 한다.

2. 미적분 I 에서 배운 위치와 속도와의 관계와 정적분을 이용하여 직선 운동을 하는 물체의 위치의 변화량과 주어진 시간 동안 실제로 움직인 거리를 구하게 한다. 이때 위치의 변화와 실제로 운동한 거리를 혼동하지 않도록 강조하여 지도한다.

3. 최고 높이에 도달하거나 운동 방향이 바뀌는 지점에서는 속도가 0이 됨을 이해하게 한다.

교과서 112 쪽

02 속도와 거리

● 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

정적분을 이용하여 수직선 위를 움직인 거리는 어떻게 구하는가?

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 주어졌을 때, 점 P의 위치를 구하여 보자.

시각 t에서 점 P의 위치를 $x=f(t)$라고 하면 속도 $v(t)$는 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$이다.

$f(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로 시각 $t=t_0$에서의 점 P의 위치를 $f(t_0)=x_0$이라고 하면 $\int_{t_0}^{t} v(t)dt=f(t)-f(t_0)=x-x_0$이다.

따라서 시각 t에서의 점 P의 위치 x는 $x=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt$이다.

❶ 또한 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

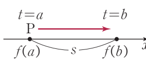
$$f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$

이다.

이제 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 수직선 위에서 움직인 거리 s를 구하여 보자.

(i) $v(t)>0$일 때

$x=f(t)$는 증가하므로 점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$에서 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$를 뺀 것과 같다. 즉,

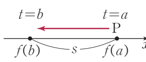


❷ $$s=f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$

이다.

(ii) $v(t)<0$일 때

$x=f(t)$는 감소하므로 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$에서 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$를 뺀 것과 같다. 즉,



$$s=f(a)-f(b)=\int_b^a v(t)dt=-\int_a^b v(t)dt$$

이다.

본문 해설

❶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$라고 할 때 시각 t에서의 점 P의 속도 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$에서 $x=f(t)$는 $v(t)$의 부정적분이며

$$x=\int v(t)dt$$

이다. 그러므로

$$x=\int_a^b v(t)dt=\Big[\,f(t)\,\Big]_a^b=f(b)-f(a)$$

가 되어 $\int_b^a v(t)dt$가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 위치의 변화량이다.

❷ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)\,(v(t)>0)$로 주어질 때 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 이동한 거리 s는 구분구적법과 같은 방법으로 시간 $(b-a)$를 n등분하여 (거리)=(속도)×(시간)이라는 관계식을 이용하여 구할 수도 있다.

$$\frac{b-a}{n}=\varDelta t,\ a+k\varDelta t=t_k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

라고 할 때, 점 P가 시각 $t=t_{k-1}$에서 $t=t_k$까지 이동한 거리 $\varDelta s_k$는 $\varDelta s_k=v(t_k)\varDelta t$이다.

따라서 전체 거리는

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varDelta s_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}v(t_k)\varDelta t$$

즉, $s=\int_a^b v(t)dt$와 같이 정적분으로 나타낼 수 있다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 수직선 위에서 움직인 거리 s는 다음과 같다.

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **수직선 위를 움직이는 점의 위치와 거리**

시각 t에서 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도를 $v(t)$, 시각 t_0에서 점 P의 위치를 x_0라고 할 때,

(1) 시각 t에서 점 P의 위치: $x=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량: $\Delta x=\int_a^b v(t)dt$

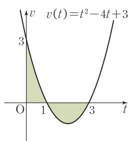
(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리: $s=\int_a^b |v(t)|dt$

예제 01 시각 t에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t)=t^2-4t+3$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서 점 P의 위치

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리



풀이 (1) 시각 t에서의 점 P의 위치는

$$x=0+\int_0^t (t^2-4t+3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\Delta x=\int_0^3 (t^2-4t+3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^3=0$$

(3) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^3 |t^2-4t+3|dt=\int_0^1 (t^2-4t+3)dt+\int_1^3 (-t^2+4t-3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$ (2) 0 (3) $\frac{8}{3}$

지/도/자/료

시각 t에서의 위치가 x일 때, 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

$$v=\frac{dx}{dt},\ a=\frac{dv}{dt}$$

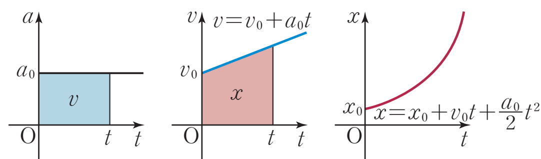
따라서 x_0에서 출발한 물체의 처음 속도가 v_0이고 가속도가 a_0이라고 하면 이 물체의 시각 t에서의 속도 v와 위치 x는 다음과 같다.

$$v=v_0+\int_0^t a_0\,dt=v_0+a_0t$$

$$x=x_0+\int_0^t v\,dt$$

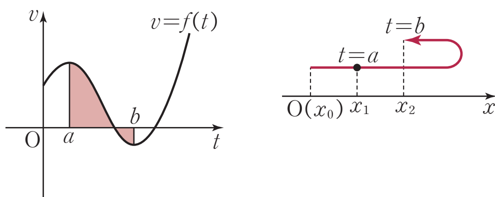
$$=x_0+\int_0^t (v_0+a_0t)dt$$

$$=x_0+v_0t+\frac{a_0}{2}t^2$$



본문 해설

❶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 v가 $v=f(t)$로 주어질 때



(1) 시각 $t=b$일 때의 점 P의 위치는

$$x_2=x_0+\int_a^b v\,dt=x_0+\int_a^b f(t)\,dt$$

(단, x_0은 출발점의 위치)

(2) 시각 $t=a$부터 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

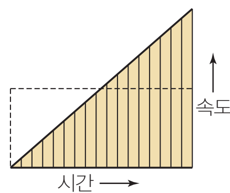
$$x_2-x_1=\int_a^b v\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v|\,dt=\int_a^b |f(t)|\,dt$$

읽/기/자/료 등가속도 운동을 하는 물체의 시각화

오렘(Oresme, N. ; 1325~1382)은 등가속도 운동을 하는 물체의 시간과 속도의 관계를 처음으로 기하학적으로 표현하였다.



그는 가로축을 시간의 변화로, 세로축을 속도의 변화로 나타내고 일정한 시간의 범위 내에서 등가속도 운동을 하는 물체가 이동한 거리는 직각삼각형의 넓이이며, 시간의 절반이 지난 지점에서의 속도로 등속도 운동을 한 물체가 이동한 거리와 같다는 점을 밝혔다.

이 주장의 밑바탕에는 삼각형을 직각삼각형의 넓이의 합으로 보는 구분구적법의 생각이 들어 있다. 이러한 시각화 과정을 이용하여 갈릴레오는 등가속도 운동을 하는 물체가 이동한 거리는 시간의 제곱에 비례한다는 법칙을 찾아낼 수 있었다.

1

목표| 정적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점의 위치, 위치의 변화량과 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 시각 t에서의 점 P의 위치는

$$x=0+\int_0^t 2\cos\frac{\pi}{4}t\,dt$$
$$=\left[\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_0^t$$
$$=\boldsymbol{\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t}$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\Delta x=\int_0^4 2\cos\frac{\pi}{4}t\,dt$$
$$=\left[\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_0^4$$
$$=\frac{8}{\pi}\sin\pi$$
$$=\mathbf{0}$$

(3) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^4\left|2\cos\frac{\pi}{4}t\right|dt$$
$$=\int_0^2 2\cos\frac{\pi}{4}t\,dt+\int_2^4\left(-2\cos\frac{\pi}{4}t\right)dt$$
$$=\left[\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_0^2+\left[-\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\right]_2^4$$
$$=\frac{8}{\pi}+\frac{8}{\pi}=\boldsymbol{\frac{16}{\pi}}$$

교과서 114 쪽

문제 1 시각 t에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t)=2\cos\frac{\pi}{4}t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리

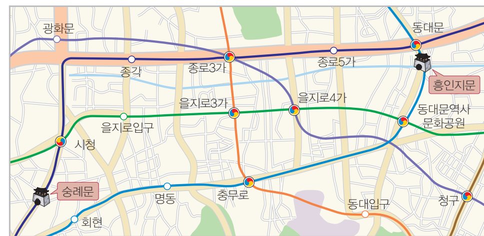
정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리는 어떻게 구하는가?

생각 열기 유적 탐방

서울은 우리나라의 수도로서 국제적인 도시일 뿐만 아니라 많은 유적지를 가지고 있는 역사의 도시이다. 서울에는 국보1호인 숭례문과 보물1호인 흥인지문을 비롯하여 유네스코 세계문화유산인 종묘와 창덕궁 등이 있다.



탐구 활동 희경이는 흥인지문에서 숭례문까지 가는데 흥인지문에서 동대문 역까지 걸었고 동대문 역에서 지하철을 타고 종로5가–종로3가–종각 역을 거쳐 시청 역에서 내려서 걸어갔다. 지하철과 도보로 이동한 전체 거리를 구하려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



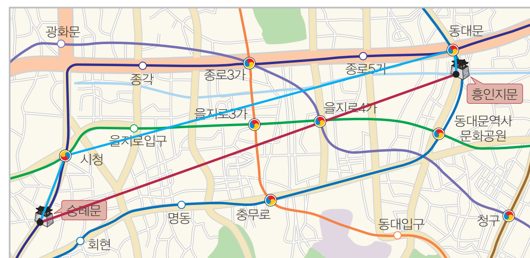
1. 자를 한 번만 사용하여 흥인지문에서 숭례문까지의 길이를 재어 보자.
2. 자를 세 번 사용하여 흥인지문–동대문–시청–숭례문을 연결하고 길이를 더하여 보자.
3. 어떻게 하면 실제 움직인 거리에 가까운 값을 구할 수 있을지 말하여 보자.

생각 열기 참/고/자/료

1392년 조선의 수도가 된 이래 600년이 넘는 역사를 가진 서울은 세계적인 도시로서 세계문화유산목록에 등재된 종묘, 조선 왕릉 등 많은 유적을 가지고 있어 탐방할 곳이 많다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지도(평면)에서 실제 움직인 거리에 가까운 값을 구하는 과정을 살피고, 작은 선분들로 잘라가는 과정에서 정적분의 개념이 있음을 알게 하기 위한 것이다.



1. 흥인지문과 숭례문까지의 길이(빨간색 선)는 약 **10 cm**이다.

2. 흥인지문–동대문–시청–숭례문을 연결한 길이(파란색 선)는
약 0.5 cm+9 cm+1.5 cm=**11 cm**

3. 지하철과 도보로 이동한 전체 거리를 구하려면 이동 거리가 직선이 아니므로 직선에 가까운 더 작은 부분으로 나누어 더하면 실제 움직인 거리에 가까운 값을 구할 수 있다.

점 P가 좌표평면 위를 움직일 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 $(x,\ y)$라고 하면 $x,\ y$는 각각 시각 t의 함수이므로 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여 보자.

점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t(a\le t\le b)$의 함수이다. 시각 t에서 A$(x,\ y)$에 있던 점 P가 시각 $t+\Delta t$로 변함에 따라 B$(x+\Delta x, y+\Delta y)$로 이동했을 때, 움직인 거리 s의 증분 Δs는 Δt가 매우 작을 때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이와 거의 같다.

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\end{aligned}$$

따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같다.

❶ $$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 위에서 점이 움직인 거리

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

한편 시각 t에서 점 P의 속도 $\vec{v}$가 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$s=\int_a^b|\vec{v}|\,dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

본문 해설

❶ 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t_0일 때의 위치가 x_0이고, 시각 t일 때의 속도를 $v(t)$라고 하면 이 물체의 위치 x는

$$x=x_0+\int_{t_0}^t v(t)\,dt$$

또 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량은

$$x_2-x_1=\int_a^b v(t)\,dt$$

이고, 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b|v(t)|\,dt$$

이다.

한편 좌표평면 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 위치가 P$(x(t),\ y(t))$일 때, 이 물체의 속도 v의 순서쌍 $(v_x,\ v_y)$는

$$(v_x,\ v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

이다.

또 이때의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

이다.

지/도/자/료

곡선이 매개변수 t를 사용하여 $x=f(t)$, $y=g(t)\,(a\le t\le b)$로 나타내어질 때, 점 P$(x,\ y)$가 움직인 거리는 점 P가 그리는 곡선의 길이와 같다.

따라서 점 P가 움직인 경로가 겹치지 않으면 점 P가 그리는 곡선의 길이 l은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}l&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt\end{aligned}$$

한편 곡선 $y=f(x)$는 점 P의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=t,\ y=f(t)$$

로 주어지는 곡선으로 생각할 수 있다. 이때

$$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=f'(t)$$

이므로 곡선 $y=f(t)$의 $t=a$에서 $t=b$까지의 길이 l은

$$\begin{aligned}l&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\end{aligned}$$

읽/기/자/료 적분법의 발견

이집트, 바빌로니아, 중국 등 고대 수학사에서도 도형의 길이, 넓이, 부피를 구하는 구적법이 사용되었으나 17세기에 와서야 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)이 '움직이는 물체의 시각 t에서의 속도 v가 주어질 때 정해진 시간 $[a,\ b]$ 동안 그 물체가 그리는 자취의 길이'를 구하는 방법으로 적분법을 발견하였다.

한편 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)는 '곡선의 접선이 주어졌을 때 그 곡선을 구하는 방법'을 찾기 위하여 적분법을 발견하였다.

2

목표| 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-3$이므로

$\vec{v}=(6t,\ 3t^2-3)$

따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^2\sqrt{(6t)^2+(3t^2-3)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{9t^4+18t^2+9}\,dt$$
$$=\int_0^2 3(t^2+1)dt$$
$$=\Big[t^3+3t\Big]_0^2$$
$$=\mathbf{14}$$

교과서 116 쪽

예제 02 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=\frac{1}{3}t^3-t$, $y=-t^2$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

풀이 $\frac{dx}{dt}=t^2-1$, $\frac{dy}{dt}=-2t$이므로 $\vec{v}=(t^2-1,\ -2t)$

따라서 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^1\sqrt{(t^2-1)^2+(-2t)^2}dt=\int_0^1(t^2+1)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3+t\Big]_0^1=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

문제 2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=3t^2$, $y=t^3-3t+1$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

문제 3 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=\cos t$, $y=\sin t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

단원 과제

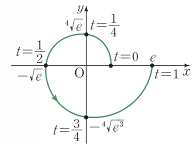
앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

평면 위에서 운동하는 점이 움직인 거리를 구하는 방법을 이용하여 다음과 같은 나선형 모양의 곡선의 길이도 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=e^t\cos 2\pi t,\ \ y=e^t\sin 2\pi t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하여라.



3

목표| 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로

$\vec{v}=(-\sin t,\ \cos t)$

따라서 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dt$$
$$=\Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

단원 과제

목표| 정적분을 이용한 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구하는 방법으로 곡선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=e^t\cos 2\pi t-2\pi e^t\sin 2\pi t$,

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin 2\pi t+2\pi\cos 2\pi t$이므로

벡터 $\vec{v}$는

$(e^t(\cos 2\pi t-2\pi e^t\sin 2\pi t),\ e^t(\sin 2\pi t+2\pi\cos 2\pi t))$

따라서 점 P가 그리는 곡선의 길이는

$$\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1 e^t\sqrt{1+4\pi^2}dt$$
$$=\Big[e^t\sqrt{1+4\pi^2}\Big]_0^1$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{1+4\pi^2}(e-1)}$$

교과서 117 쪽

중단원 기초

[해답 p.213]

수준별 학습

1 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=4t,\ y=t^2-1$$

일 때, 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

01 속도와 가속도

2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=3t,\ y=-2t^2+4t$$

이다. 점 P의 속도의 크기가 최소가 될 때의 시각을 구하여라.

01 속도와 가속도
속력

3 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\frac{5}{3}t^3-t+2,\ y=\sqrt{5}t^2+4$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

4 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=3\sin t+4\cos t,\ y=4\sin t-3\cos t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

중/단/원 기초

1

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{dt}=4$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로 $\vec{v}=\mathbf{(4,\ 2t)}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 $\vec{a}=\mathbf{(0,\ 2)}$

2

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도의 크기를 구해 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=-4t+4$이므로

$\vec{v}=(3,\ -4t+4)$

$|\vec{v}|=\sqrt{3^2+(-4t+4)^2}=\sqrt{16(t-1)^2+9}$

이므로 점 P의 속도의 크기가 최소가 될 때의 시각은 $\mathbf{t=1}$

3

목표| 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{dt}=5t^2-1$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sqrt{5}t$이므로

$\vec{v}=(5t^2-1,\ 2\sqrt{5}t)$

따라서 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^1\sqrt{(5t^2-1)^2+(2\sqrt{5}t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{25t^4+10t^2+1}\,dt$$
$$=\int_0^1(5t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{5}{3}t^3+t\right]_0^1$$
$$=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

4

목표| 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dx}{dt}=3\cos t-4\sin t$,

$\dfrac{dy}{dt}=4\cos t+3\sin t$이므로

$\vec{v}=(3\cos t-4\sin t,\ 4\cos t+3\sin t)$

따라서 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^\pi\sqrt{(3\cos t-4\sin t)^2+(4\cos t+3\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{25(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^\pi 5dt$$
$$=\Big[5t\Big]_0^\pi$$
$$=\mathbf{5\pi}$$

교과서 118 쪽

중단원 기본

[해답 p.213]

수준별 학습

1 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

일 때, 시각 $t=1$에서 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

01 속도와 가속도

2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=-1+\sin 2t,\ y=\cos 2t+t$$

일 때, 점 P의 속력의 최댓값을 구하여라.

01 속도와 가속도 속력

3 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$$

이다. 점 P의 속력이 $\sqrt{2}e^2$일 때의 시각을 구하여라.

01 속도와 가속도 속력

4 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=3t^2,\ y=t^3-3t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 점 P의 속력이 30이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

02 속도와 거리 움직인 거리

5 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\ln t,\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

일 때, 시각 $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하여라.

02 속도와 거리 움직인 거리

중/단/원 기본

1

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2},\ \frac{dy}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$이고

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$이므로

$t=1$일 때 속도는

$\left(\frac{e-e^{-1}}{2},\ \frac{e+e^{-1}}{2}\right)=\left(\boldsymbol{\frac{e^2-1}{2e},\ \frac{e^2+1}{2e}}\right)$,

가속도는

$\left(\frac{e+e^{-1}}{2},\ \frac{e-e^{-1}}{2}\right)=\left(\boldsymbol{\frac{e^2+1}{2e},\ \frac{e^2-1}{2e}}\right)$

2

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속력을 구해 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=2\cos 2t,\ \frac{dy}{dt}=-2\sin 2t+1$

이므로

$|\vec{v}|=\sqrt{(2\cos 2t)^2+(-2\sin 2t+1)^2}$

$=\sqrt{-4\sin 2t+5}$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 $\sin 2t=-1$일 때 **3**이다.

3

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속력을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}=\sqrt{2}e^t$

$\sqrt{2}e^t=\sqrt{2}e^2$에서 $t=\mathbf{2}$

4

목표| 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=6t,\ \frac{dy}{dt}=3t^2-3$이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{(6t)^2+(3t^2-3)^2}=3\sqrt{(t^2+1)^2}=3(t^2+1)$

$3(t^2+1)=30$에서 $t^2+1=10,\ t=3$

따라서 구하는 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3(3t^2+3)dt=\left[t^3+3t\right]_0^3=\mathbf{36}$

5

목표| 평면 위에서 점이 움직인 거리를 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t},\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{t^2-1}{2t^2}$

이때 $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이는 점 P가 움직인 거리와 같으므로

$s=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{t^2-1}{2t^2}\right)^2}dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{t^2+1}{2t^2}dt$

$=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{2t}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}=\boldsymbol{e-\frac{1}{e}}$

교과서 119 쪽

중단원 실력

[해답 p.213]

수준별 학습

1 시각 t에서 타원 $x^2+16y^2=1$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 속도의 x성분이 3이라고 한다. 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 y좌표가 양수일때, 속도의 y성분을 구하여라.

01 속도와 가속도
속도

2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$$

일 때, 시각 $t=2$에서 점 P의 속력을 구하여라.

01 속도와 가속도
속력

3 곡선 $y=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{x}$에 대하여 $x=1$에서 $x=2$까지 곡선의 길이를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

4 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\frac{1}{2}t^2-2t,\ y=\frac{4\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 6이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

중/단/원 실력

1

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속도를 구해 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+16y^2=1$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면 $y=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$x^2+16y^2=1$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{dt}+32y\frac{dy}{dt}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

시각 t에서 점 P의 속도는 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$이므로

$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{8}$, $\frac{dx}{dt}=3$을 ①에 대입하면

$$2\times\frac{1}{2}\times3+32\times\frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{dy}{dt}=0$$

$3+4\sqrt{3}\frac{dy}{dt}=0$이므로 $\frac{dy}{dt}=\mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$

2

목표| 미분법을 이용하여 위치벡터가 주어진 점의 속력을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=-e^{-t}(\sin t+\cos t)$,

$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$

이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{\{-e^{-t}(\sin t+\cos t)\}^2+\{-e^{-t}(\sin t-\cos t)\}^2}$

$=\sqrt{2e^{-2t}}=\sqrt{2}e^{-t}$

따라서 $t=2$에서 점 P의 속력은 $\mathbf{\sqrt{2}e^{-2}}$이다.

3

목표| 평면 위에서 점이 움직인 거리를 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 매개변수 방정식으로 고쳐서 생각한다.

$x=t$이면 $y=\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{t}$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{t^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^2}\right)^2}=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^2}$$

따라서

$$\int_1^2|\vec{v}|\,dt=\int_1^2\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{12}t^3-\frac{1}{t}\right]_1^2=\mathbf{\frac{13}{12}}$$

4

목표| 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=t-2$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{2t}$이므로

이때 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이는 점 P가 움직인 거리와 같으므로

$$S=\int_0^a\sqrt{(t-2)^2+(2\sqrt{2t})^2}\,dt=\int_0^a(t+2)dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_0^a=\frac{a^2}{2}+2a$$

$\frac{a^2}{2}+2a=6$에서 $a^2+4a-12=0$

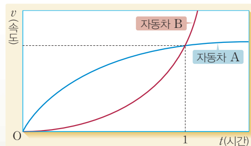
$(a+6)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=\mathbf{2}$

수행 과제

시간 - 속도 그래프의 해석

다음 그래프는 두 자동차 A, B의 시간에 따른 속도의 변화를 나타낸 것이다. 두 자동차 A, B가 같은 지점에서 출발하여 같은 방향으로 달린다고 가정했을 때, 주어진 그래프를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.



| 과제 | 1 출발 1시간 후 두 자동차의 위치 사이의 관계를 설명하여 보자.

| 과제 | 2 출발 1시간 후 두 자동차의 속도 사이의 관계를 설명하여 보자.

| 과제 | 3 출발 1시간 후 두 자동차의 가속도 사이의 관계를 설명하여 보자.



대단원 학습 내용 정리

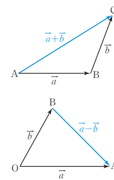
1 벡터의 연산

벡터의 뜻

크기와 방향을 함께 가지는 양

벡터의 덧셈과 뺄셈

(1) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$에 대하여
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



(2) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$에 대하여
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

벡터의 실수배

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 실수 k에 대하여 $k\vec{a}$는
① $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기는 $k|\vec{a}|$이다.
② $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기는 $|k||\vec{a}|$이다.
③ $k=0$이면 $\vec{0}$이다.
(2) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
$\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

2 평면벡터의 성분과 내적

위치벡터

점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 위치벡터라 한다.

평면벡터의 성분

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때
(1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$
(2) $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$
(3) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
(4) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
(5) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

평면벡터의 내적

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$일 때,
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

평면벡터의 내적과 수직 · 평행 조건

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
(1) 수직 조건: $\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
(2) 평행 조건: $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

좌표평면에서 직선의 방정식

(1) 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a,\ b)$에 평행한 직선의 방정식은
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\ \text{(단, } ab\neq0\text{)}$$
(2) 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$에 수직인 직선의 방정식은
$$n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)=0$$

좌표평면에서 원의 방정식

점 $A(x_1,\ y_1)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

3 평면 운동

평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기
$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\ |\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right),\ |\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

평면 위에서 점이 움직인 거리

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리
$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

| 용어와 기호 | 벡터, 시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 평면벡터, 영벡터, 실수배, 위치벡터, 벡터의 성분, 내적, 방향벡터, 법선벡터, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $|\vec{a}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$

수행 과제

● 수행 과제 의도

평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 이용하여 두 자동차의 위치, 속도, 가속도 사이의 관계를 알게 한다.

과제 1 _풀이

두 자동차는 같은 위치에서 출발하여 같은 방향으로 달리므로 움직인 거리를 비교하면 위치를 알 수 있다.
움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=0$, $t=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로, 자동차 A가 자동차 B보다 출발점에서 더 먼 곳에 위치한다.

과제 2 _풀이

$t=1$에서 두 곡선이 만나므로 자동차 A와 자동차 B의 속도는 같다.

과제 3 _풀이

가속도는 속도의 순간변화율을 의미하므로 $t=1$일 때 두 곡선의 접선의 기울기를 비교해 보면 자동차 A보다 자동차 B의 가속도가 더 크다는 것을 알 수 있다.

교과서 122 쪽

대/단/원 평가 문제

Ⅱ. 평면벡터

선택형

1 등식 $4\vec{x}-3\vec{a}=2\vec{b}+\vec{x}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면?

① $\vec{x}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　② $\vec{x}=-\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$　③ $\vec{x}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　④ $\vec{x}=\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$　⑤ $\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$

2 두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. 점 B가 선분 AC의 중점이 되도록 점 C를 잡을 때, $\overrightarrow{OC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면?

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $\vec{a}+2\vec{b}$　③ $-\vec{a}+2\vec{b}$　④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

3 세 평면벡터

$\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$, $\vec{c}=(1,\ -5)$

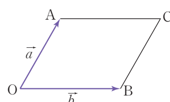
에 대하여 $\vec{c}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$를 만족시키는 실수 k_1, k_2의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

4 평면 위의 서로 다른 세 점 A$(-2,\ t)$, B$(2,\ -3)$, C$(6,\ -1)$이 한 직선 위에 있도록 하는 실수 t의 값은?

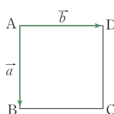
① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

5 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 OBCA에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$일 때, 평행사변형 OBCA의 넓이는?



① 10　② $10\sqrt{3}$　③ 20　④ $20\sqrt{3}$　⑤ 30

6 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 할 때, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

7 두 평면벡터 $\vec{a}=(3,\ -4)$, $\vec{b}=(7,\ -1)$이 이루는 각의 크기는?

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{2}$　⑤ π

8 두 평면벡터 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ 1-x)$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{b}$를 만족시키는 x의 값을 p, $\vec{a}/\!/\vec{b}$를 만족시키는 x의 값을 q라고 할 때, $p+2q$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

대/단/원 평가 문제

1

목표| 벡터의 실수배에 대한 성질을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $3\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$이므로

$\vec{x}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

답 ③

2

목표| 선분의 중점의 위치벡터를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 B가 선분 AC의 중점이므로

$\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}$이다.

$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

$=-\vec{a}+2\vec{b}$

답 ③

3

목표| 평면벡터를 서로 다른 두 벡터의 합으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $(1,\ -5)=k_1(2,\ 4)+k_2(3,\ -1)$

$=(2k_1+3k_2,\ 4k_1-k_2)$

$2k_1+3k_2=1$, $4k_1-k_2=-5$이므로

두 식을 연립하여 풀면 $k_1=-1$, $k_2=1$이므로

$k_1+k_2=0$

답 ①

4

목표| 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 알게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(2,\ -3)-(-2,\ t)$

$=(4,\ -3-t)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(6,\ -1)-(-2,\ t)$

$=(8,\ -1-t)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 실수 k가 존재해야 한다.

$(8,\ -1-t)=k(4,\ -3-t)$에서

$4k=8$, $-1-t=k(-3-t)$

따라서 $k=2$이므로 구하는 t의 값은 -5이다.

답 ⑤

5

목표| 벡터의 내적을 이용하여 평행사변형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

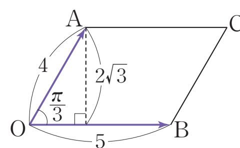
풀이| 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=4\times5\times\cos\theta=10$이므로

$20\cos\theta=10$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\le\theta\le\pi$이므로　$\theta=\frac{\pi}{3}$

따라서 오른쪽 그림과 같이 평행사변형의 높이는 $2\sqrt{3}$이 되므로 넓이는



$5\times2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

답 ②

6

목표| 정사각형의 성질을 이용하여 벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

$=2\times1+0-1=1$ 답 ①

7

목표| 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{3\times7+(-4)\times(-1)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{7^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 답 ②

8

목표| 평면벡터의 내적과 수직 · 평행 조건을 알게 한다.

풀이| $\vec{a}\cdot\vec{b}=x+3(1-x)=-2x+3$

$\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이어야 하므로

$-2x+3=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

또 $\vec{a}/\!/\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$이어야 하므로

$-2x+3=\pm\sqrt{10}\sqrt{x^2+(1-x)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16x^2-8x+1=0$

$(4x-1)^2=0$에서 $x=\frac{1}{4}$

따라서 $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{1}{4}$이므로 $p+2q=2$ 답 ②

교과서 123 쪽

[해답 p.213]

9 좌표평면에서 두 직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$과 $ax-y=0$이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, a의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

10 시각 t에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이고 있는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\cos 2t,\ y=\sin 2t$$

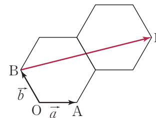
일 때, 시각 t에서 점 P의 가속도의 크기는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

서답형

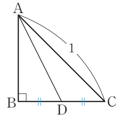
11 $\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c})$를 간단히 하여라.

12 오른쪽 그림과 같이 정육각형 두 개가 한 변을 공유하고 있다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{BP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



13 삼각형 ABC의 내부에 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$가 성립하도록 점 P를 잡는다. 삼각형 ABC의 넓이가 90일 때, 삼각형 PAB, PBC, PCA의 넓이를 각각 구하여라.

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}=1$인 직각이등변 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 D라고 할 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$의 값을 구하여라.



|서|술|형|

15 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$이면 $\vec{a}\perp\vec{b}$임을 보여라.

|서|술|형|

16 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 속도 $\vec{v}$가

$$\vec{v}=(e^t(\sin t+\cos t),\ e^t(\sin t-\cos t))$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

9

목표| 두 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| l_1: $\frac{x+1}{\sqrt{3}}=\frac{y}{-1}$, l_2: $x=\frac{y}{a}$이므로

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각

$\vec{u_1}=(\sqrt{3}, -1)$, $\vec{u_2}=(1, a)$

두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이므로

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\sqrt{3}\times1+(-1)\times a|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+a^2}},\ \frac{1}{2}=\frac{|\sqrt{3}-a|}{2\sqrt{1+a^2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2\sqrt{3}a=2$

따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ①

10

목표| 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 가속도의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$이므로

$\vec{v}=(-2\sin 2t,\ 2\cos 2t)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-4\cos 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 2t$이므로

$\vec{a}=(-4\cos 2t,\ -4\sin 2t)$

따라서 시각 t에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-4\cos 2t)^2+(-4\sin 2t)^2}$

$=\sqrt{16\cos^2 2t+16\sin^2 2t}=4$ 답 ②

11

목표| 벡터의 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (주어진 식)$=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\vec{c}$

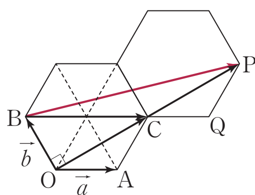
$=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{c}$

답 $-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{c}$

12

목표| 벡터의 연산법칙을 이용하여 주어진 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있게 한다.

풀이|



$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{AC}$

$=3\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

$=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}$

$=4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{a}+\vec{b}$

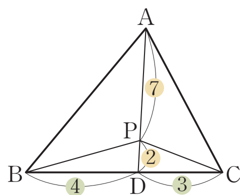
답 $4\vec{a}+\vec{b}$

13

목표| 선분의 내분점을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$-\frac{2}{7}\overrightarrow{PA}=\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}$



이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 $4:3$으로 내분하는 점을 D라고 하면 $\overrightarrow{PD}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{PA}$가 된다.

$|\overrightarrow{PD}|=\frac{2}{7}|\overrightarrow{PA}|$이므로 점 P는 $\overline{AD}$를 $7:2$로 내분하는 점이다. 따라서

$\triangle PAB=\frac{7}{9}\triangle ABD=\frac{7}{9}\times\frac{4}{7}\triangle ABC=40$

$\triangle PBC=\frac{2}{9}\triangle ABC=20$

$\triangle PCA=\frac{7}{9}\triangle ADC=\frac{7}{9}\times\frac{3}{7}\triangle ABC=30$

답 $\triangle PAB=40$, $\triangle PBC=20$, $\triangle PCA=30$

14

목표| 삼각형의 성질을 이용하여 벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| $|\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

15

목표| 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 수직일 조건을 보일 수 있게 한다.

풀이| $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$에서

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

따라서 $\vec{a}\perp\vec{b}$이다.

답 풀이 참조

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert$의 양변을 제곱하기	40%
	$\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값 구하기	40%
답 구하기	$\vec{a}\perp\vec{b}$임을 보이기	20%

16

목표| 정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $|\vec{v}|=\sqrt{\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2+\{e^t(\sin t-\cos t)\}^2}$

$=e^t\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sqrt{2}e^t$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\pi}|\vec{v}|\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{2}e^t\,dt=\sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^{\pi}$

$=\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

답 $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$\lvert\vec{v}\rvert$ 구하기	50%
답 구하기	점 P가 움직인 거리 구하기	50%



Real Life

수 학 ✚ 실 생 활

벡터의 합

우리나라 속담에 쉽게 마무리 할 수 있었던 일을 나중에 어렵게 처리한다는 뜻의 '호미로 막을 일을 가래로 막는다.' 라는 말이 있다. 호미는 요즘에도 많이 사용하고 있기 때문에 어떻게 생겼고 어디에 사용되는 농기구인지는 많은 사람들이 잘 알고 있지만, 가래는 어떤 농기구인지 모르는 사람이 많다.

가래는 삽처럼 생긴 가랫날의 양 귀퉁이에 끈을 묶어서 두 사람이 양쪽에서 잡아당기고, 또 다른 한 사람은 가래의 손잡이를 붙들고 힘과 방향을 조절하는 농기구이다. 가래를 사용하면 땅을 깊게 파거나 흙을 멀리 던져 보내는 힘든 일도 쉽게 할 수 있다. 쇠가 귀하던 옛날의 가래는 나무판을 깎아 만든 후 테두리에만 쇠를 끼웠고 쇠날이 무뎌질 때마다 대장간에서 교체하여 사용하였는데, 근래의 가래는 삽과 같이 손잡이를 제외하고는 모두 쇠로 제작한다.


가래

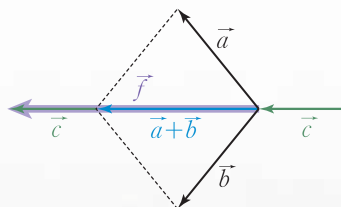
가래를 사용하면 작은 힘을 하나로 합쳐서 큰 힘을 만들 수 있는데, 가래와 같은 원리를 이용하는 또 다른 기구로 두레가 있다. 두레는 보통 농촌에서 농사일을 공동으로 하기 위하여 마을에 둔 조직을 뜻하지만 여기서 말하는 두레는 낮은 곳에서 높은 곳으로 물을 퍼 올리는 농기구이다. 두레는 바가지에 끈을 묶은 후 두 사람이 양쪽에서 잡아당겨서 물을 퍼 올리는 방식으로 사용한다.


두레

가래나 두레와 같이 여러 방향으로 힘을 주어 하나의 기구를 움직이는 경우는 벡터를 사용하면 수학적으로 정확히 표현할 수 있다.

가래는 두 사람이 양쪽에서 잡아당기고, 또 다른 한 사람은 가래 손잡이를 붙들고 힘과 방향을 조절하므로 3개의 벡터로 나타내어야 한다. 이때 양쪽에서 잡아당기는 힘을 각각 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 손잡이에 주는 힘을 벡터 $\vec{c}$라고 하자. 이 세 벡터의 합을 구하면 가래의 힘인 벡터 $\vec{f}$가 나온다.



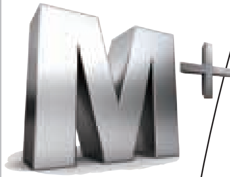


이와 같은 원리에 따라 가래는 세 사람의 힘을 합쳐 큰 힘을 낼 수 있다.

수 학  실 생 활

M+

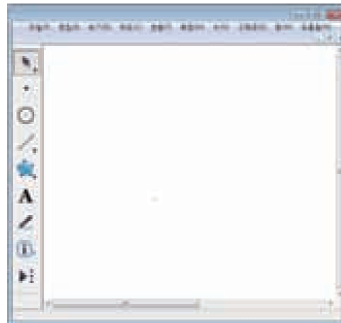
교과서 126 쪽



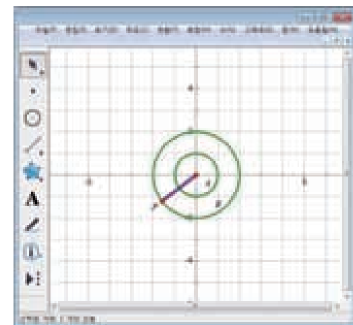
Engineering

수 학 + 공 학

에피사이클로이드 그리기



컴퓨터 프로그램을 이용하여 반지름의 길이가 1인 원 위를 반지름의 길이가 같은 원이 굴러서 바깥쪽으로 회전할 때, 구르는 원 위의 한 점이 그리는 곡선인 에피사이클로이드를 그릴 수 있다.

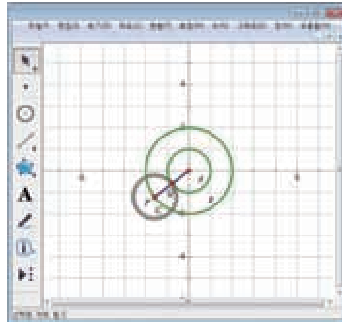


1. [그래프]-[격자 형태]-[정사각좌표 격자]를 선택한다.
2. 원 도구 을 선택하여 반지름의 길이가 1이고 중심이 원점인 원 A를 작도한다.
3. [그래프]-[점을 격자에 맞추기]를 선택한다.
4. 원 도구 을 선택하여 반지름의 길이가 2이고, 중심이 원점인 원 B를 작도한다. 그리고 [그래프]-[점을 격자에 맞추기]를 다시 선택하여 기능을 해제한다.
5. 점 도구 을 선택하여 원 B 위에 점 P를 찍는다.
6. 선 도구 을 선택하여 점 P와 원점을 연결한다.

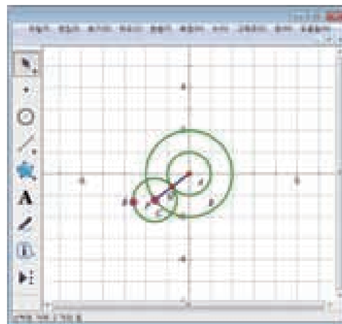




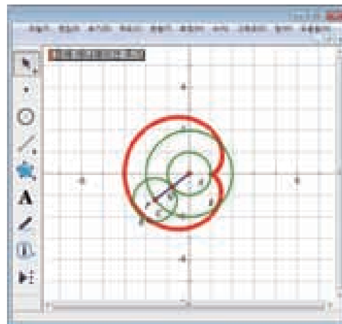
7. 화살표 도구 [아이콘]을 선택하고 6에서 연결한 선분이 선택된 상태에서 원 A를 선택한다.
8. [작도]–[교점]을 선택하여 교점 Q를 작도한다.
9. 원 도구 [아이콘]을 선택하여 점 P를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 원 C를 작도한다.



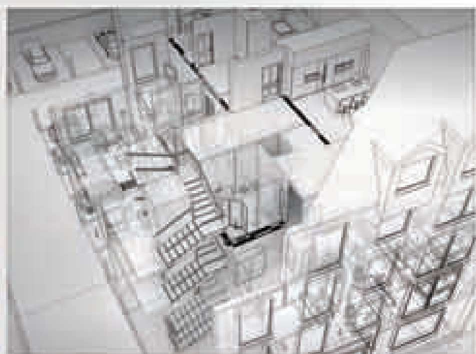
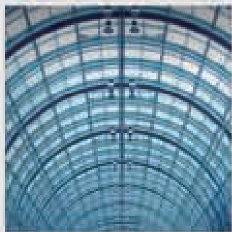
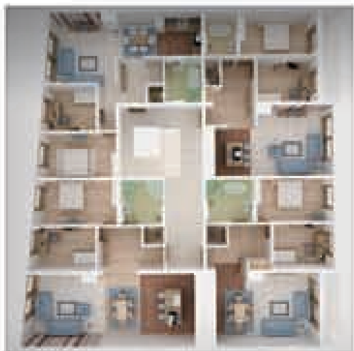
10. 점 도구 [아이콘]을 선택하여 원 C 위에 점 R를 찍는다.
11. [보기]–[점의 흔적남기기]를 선택한다.
12. 화살표 도구 [아이콘]을 선택하여 점 R가 선택된 상태에서 점 P를 선택한다.
13. [편집]–[동작 버튼]–[애니메이션]을 선택하고 확인을 선택한다.

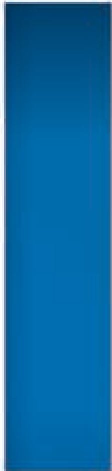
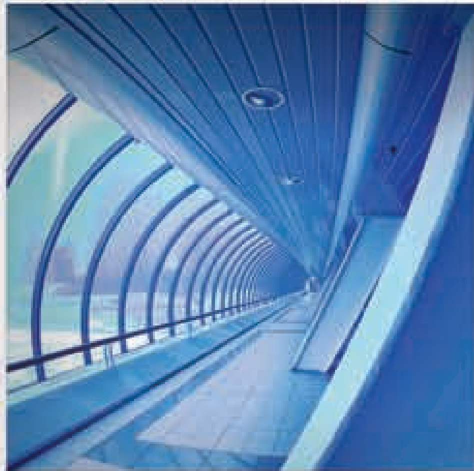


14. 왼쪽 상단에 나타난 [애니메이션:점] 버튼을 누르면 다음과 같은 에피사이클로이드의 곡선이 나타난다.

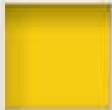


수 학 ✚ 공 학





우리 주변의 많은 도형들은 점, 선, 면으로 이루어져 있다.

Ⅲ 공간도형과 공간벡터

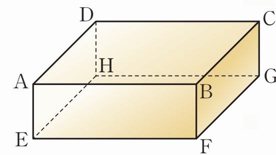
|준|비|학|습|

중① 공간에서 두 직선의 위치 관계

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 DC와 꼬인 위치에 있는 모서리 모서리 AE, 모서리 BF, 모서리 EH, 모서리 FG

(2) 면 BFGC에 평행하고, 모서리 AB와 수직으로 만나는 모서리 모서리 AD, 모서리 AE



수학Ⅰ 평면좌표

2 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 7)$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 두 점 A, B 사이의 거리 $5\sqrt{2}$

(2) 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표 $(2,\ 5)$

(3) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표 $(-6,\ -3)$

수학Ⅰ 원의 방정식

3 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 A$(3,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 4인 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$

(2) 두 점 A$(0,\ 0)$, B$(8,\ 6)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

단원의 지도 목표

1. 공간도형

① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있게 한다.
② 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.

2. 공간좌표

① 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
② 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
④ 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

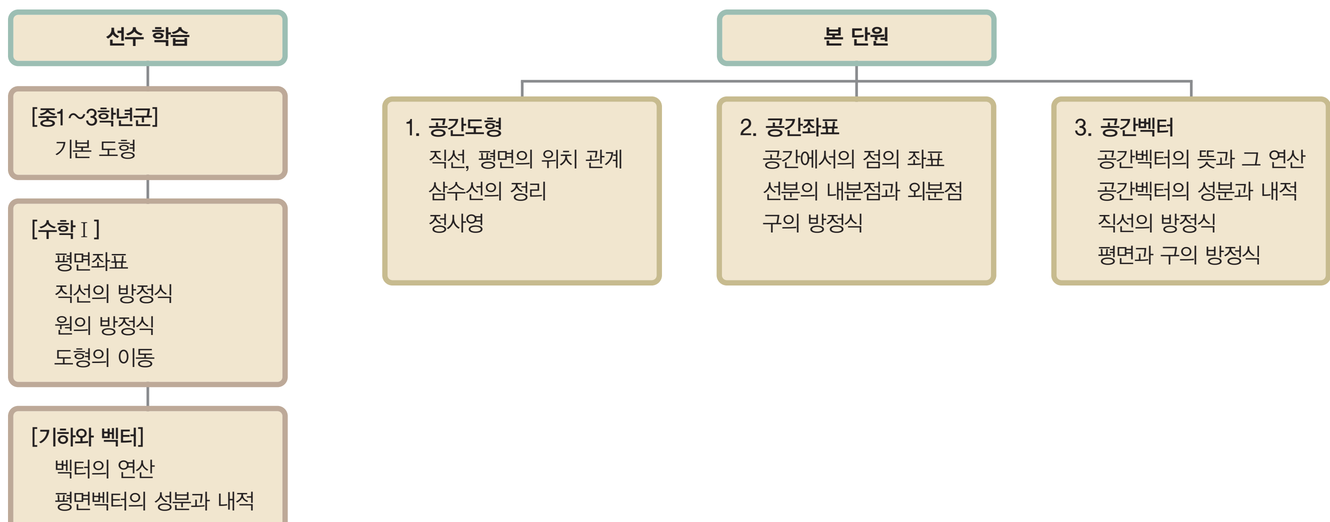
3. 공간벡터

① 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있게 한다.
② 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
④ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 공간도형의 성질은 관찰과 직관에 의해 이해한 후 증명을 하게 한다.
② 공간좌표는 평면좌표를 확장하는 수준에서 간단히 다룬다.
③ 공간좌표의 개념과 성질을 이용하여 공간도형에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.
④ 공간에서 평면의 법선벡터를 이용하여 구한 평면의 방정식이 평면의 음함수 표현임을 이해하게 한다.
⑤ 공간에서 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식이 직선의 매개변수 표현임을 이해하게 한다.
⑥ 공간에서 직선을 음함수로 표현하려면 평면의 방정식이 두 개 필요함을 이해하게 한다.
⑦ 공간벡터의 뜻과 성질은 평면벡터와 관련지어 이해하게 한다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~4	128~129	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 공간도형	중단원 도입		130	• 정다면체	
	01 직선, 평면의 위치 관계		131~137	• 평면을 결정하는 조건 • 공간에서의 위치 관계	교선
	02 삼수선의 정리	5~7	138~142	• 삼수선의 정리 • 두 평면이 이루는 각	삼수선의 정리 이면각(변, 면, 크기)
	03 정사영	8~10	143~146	• 정사영	정사영
	수준별 학습	11	147~149	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 공간좌표	중단원 도입	12~13	150	• 인공위성	
	01 공간에서의 점의 좌표		151~154	• 공간에서 점의 위치 • 좌표공간에서 두 점 사이의 거리	좌표공간, 공간좌표 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$
	02 선분의 내분점과 외분점	14	155~157	• 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점	
	03 구의 방정식	15~16	158~160	• 좌표공간에서 구의 방정식	
	수준별 학습	17	161~163	• 중단원 확인 학습 문제	
3. 공간벡터	중단원 도입	18~19	164	• 메테인 분자와 벡터의 내적	
	01 공간벡터의 뜻과 그 연산		165~169	• 공간벡터의 뜻 • 공간벡터의 연산	공간벡터
	02 공간벡터의 성분과 내적	20~23	170~177	• 공간에서의 위치벡터 • 공간벡터의 성분 • 공간벡터의 내적 • 두 공간벡터가 이루는 각의 크기	
	03 직선의 방정식	24~25	178~181	• 좌표공간에서 벡터를 이용한 직선의 방정식 • 좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기	
	04 평면과 구의 방정식	26~30	182~190	• 좌표공간에서 벡터를 이용한 평면의 방정식 • 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기 • 좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리 • 좌표공간에서 벡터를 이용한 구의 방정식	
	수준별 학습	31	191~193	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		32~33	194~199	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 기하학의 발달


유클리드

유클리드(Euclid ; ?B.C. 325~?B.C. 265)의 "기하학 원론"은 2000여 년 전 그 당시까지 발견되어 증명이 된 많은 기하학적 성질을 논리적으로 체계화해 놓은 것이다. 유클리드는 최초로 정의, 공리, 공준을 정하여 출발으로 삼았다. 여기에서 말하는 공리라는 것은 기하학뿐만 아니라 모든 학문을 전개해 나가는 데 가장 기본이 된다고 생각되는 사항이고, 공준은 기하학을 전개해 나가는 데 기본이 된다고 생각되는 사항을 뜻하고 있었으나 오늘날에는 이 공준을 기하학의 공리라고 부르고 있다.

제5공준은 평행선의 공리라고도 불리는 것으로서 다른 공리, 공준으로부터 평행선의 공리를 증명해 낼 수 없는 것인가를 많은 수학자들이 밝히려 하였으나 실패하였고, 이 노력이 비유클리드 기하학을 발견하는 동기가 되었다.

19세기에 들어와서 로바쳅스키(Lobachevskii, N. I. ; 1792~1856)는 제5공준을 증명하려고 그것을부정하는 여러 가지 명제를 유도해 냈으나 끝내 모순은발견되지 않았다. 그리고 리만(Riemann, G. F. B. ; 1826~1866)도 '직선의 길이는 유한한 것이고, 평행선은 하나도 존재하지 않는다.'는 내용을 가지는 기하학을 발표하게 되었다. 이들의 기하학을 클라인(Klein, C. F. ; 1849~1925)은 쌍곡선적 기하학, 타원적 기하학이라고 이름을 붙이게 되었으며, 이들 기하학을 비유클리드 기하학이라고 부르게 되었다. 비유클리드 기하학은 이론적 요청에 의해서 비현실적인 출발로부터 탄생되었으나, 특히 리만의 기하학은 맥스웰(Maxwell, J. C. ; 1831~1879)의 전자기학이나 아인슈타인(Einstein, A. ; 1879~1955)의 상대성 원리, 우주 과학 등 여러 분야에 응용되고 있다.

이와 같이 기하학은 긴 세월 동안 유클리드 기하학이 중심이었던 것이 비유클리드 기하학의 등장으로 그 종류도 다양해졌다.

한편, 기하학의 연구 방법상의 문제로는 근세 기하학, 종합 기하학이 제기되었고, 2차원, 3차원에 한정되어있었던 기하학이 추상적으로 차원이 확장되어 그 대상이 n차원 공간으로 확장되었다. 클라인은 1872년에 발표한 논문에서 지금까지 단순히 유클리드 기하학, 비유클리드 기하학이라고 불리던 여러 종류의 기하학을 변환군의 입장에서 통일적 견해를 부여하여 분류하였다. 변환군에는 여러 종류가 있으며 대수학에 있어서의 불변식론과도 관계가 있다. 이를테면, 사영변환군에 의해서 불변인 성질을 연구하는 사영기하학이 있고, 사영공간이 있으며 사영불변식론이 존재한다.

2. 힐베르트의 공간도형, 공간좌표


힐베르트

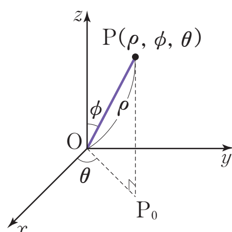
독일의 수학자 힐베르트(Hilbert, D. ; 1862~1943)는 현대 수학의 여러 분야를 창시하여 크게 발전시켰다. 그는 대수적 정수론의 연구, 불변식론의 연구, 기하학의 기초 확립, 수학의 과제로서의 몇몇 문제의 제시, 적분 방정식론의 연구와 힐베르트 공간론의 창설, 공리주의 수학 기초론의 전개 등 수학의 거의 모든 분야에서 의미 있는 업적을 남겼다.

그는 1900년 파리의 세계 수학자 회의에서 행한 수학의 전망에 관한 강연과 함께 23개의 수학 문제를 제출한 것으로 유명한데 특히, 그의 저서 "기하학의 기초"에서 제시한 공리계에 의한 기하학의 이론 구성 문제는 수학에서의 공리주의의 방향을 자리잡게 함으로써 새로운 시대를 열어 준 획기적인 것이었다.

3. 직교좌표 이외의 또다른 공간좌표

(1) 극좌표(polar coordinates)

점 P가 있을 때, $\overline{OP}$의 xy평면 위로의 정사영을 $\overline{OP_0}$이라고 하면 $\overline{OP_0}$이 x축과 이루는 각을 θ라 하고, $\overline{OP}$가 z축과 이루는 각을 ϕ, $\overline{OP}$의 길이를 ρ라고 하자.



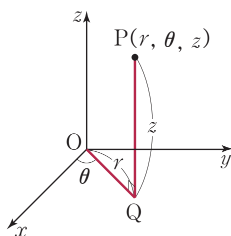
이때 ρ, ϕ, θ에 의해서 점 P가 정해진다.

이 좌표 (ρ, ϕ, θ)가 점 P의 구면좌표이다. 이것과 직교좌표 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

① $\begin{cases} x=\rho \sin\phi \cos\theta \\ y=\rho \sin\phi \sin\theta \\ z=\rho \cos\phi \end{cases}$ ② $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2+z^2 \\ \tan\phi=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$

(2) 원기둥좌표(cylindrical coordinates)

직교좌표를 정하고, 공간의 한 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. x축을 시초선으로 하는 점 Q의 xy평면 위의 극좌표를 (r, θ)라고 하면 점 P의 위치는 (r, θ, z)로 정할 수 있다. 이는 극좌표를 원점으로부터 그 점 Q까지의 거리 r와 선분 OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각 θ를 이용하여 (r, θ)와 같이 나타내는 방법이다.



이때 (r, θ, z)를 점 P의 원기둥좌표라고 한다. 이것과 직교좌표 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

① $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ ② $\begin{cases} r^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases}$

4. 벡터와 벡터공간

평면과 3차원 공간의 기하벡터 전체의 집합을 각각 V^2, V^3으로 나타내면 V^2과 V^3의 원소에는 덧셈과 실수배가 정의되고, 평면도형과 공간도형의 성질과 실수의 성질에서 다음 관계가 성립한다.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2$, λ, $\mu \in R$(실수체)라고 하면

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$(결합법칙)

(3) 영벡터 $\vec{0}\in V^2$(또는 V^3)가 존재하여 모든 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$가 성립한다.

(4) 모든 벡터 $\vec{a}$에 대하여 그의 역벡터 $-\vec{a}$가 있어 $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$이다.

(5) $1\in R$에 대하여 $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

(6) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(7) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

(8) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

앞의 8가지 성질 중 (1)~(4)는 가환군의 공리계이고, (5)~(8)은 가환군과 실수체 R와의 스칼라배에 대한 연산을 설명한다.

일반적으로 실수 대신 체 K를 취급함으로써 일반 벡터공간을 정의할 수 있다. 즉, (1)~(4)를 만족하는 가환군 V와 체 K 사이에 (5)~(8)의 성질이 만족될 때, 집합 V를 체 K 위의 벡터공간 또는 선형공간이라 하고, V의 원소를 벡터라고 한다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅲ. 공간도형과 공간벡터	쪽수	교과서 128~132쪽
소단원	1. 공간도형　01 직선, 평면의 위치 관계	차시	1/33
학습 목표	평면을 결정하는 조건을 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◯ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 평면을 결정하는 조건을 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◯ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다. ◯ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◯ 학습 내용 설명 **평면의 결정조건** (1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점 (2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점 (3) 한 점에서 만나는 두 직선 (4) 평행한 두 직선 ◯ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 공간에서 서로 다른 두 직선, 직선과 평면의 위치 관계를 이해한다.	

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅲ. 공간도형과 공간벡터	쪽수	교과서 132~135쪽
소단원	1. 공간도형　01 직선, 평면의 위치 관계	차시	2/33
학습 목표	공간에서 서로 다른 두 직선, 직선과 평면의 위치 관계를 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 비행기가 곡예하는 장면 등 여러 가지 공간에서의 위치 관계 사진을 이용하여 여러 가지 발문을 한다. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 공간에서 서로 다른 두 직선, 직선과 평면의 위치 관계를 이해한다.	
전개	개념 학습 문제 해결	◎ 학습 내용 설명 **• 공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계** (1) 한 점에서 만난다.　(2) 평행하다.　(3) 꼬인 위치에 있다. 한 평면 위에 있다.　한 평면 위에 있지 않다. **• 공간에서 직선과 평면의 위치 관계** (1) 포함된다.　(2) 한 점에서 만난다.　(3) 평행하다. 무수히 많은 점을 공유한다.　한 점을 공유한다.　공유하는 점이 없다. **• 두 직선이 이루는 각** 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 점에서 만나도록 평행이동하여 이루는 각의 크기를 두 직선이 이루는 각의 크기로 정한다. **• 수직과 수선의 발** 공간에서 직선 l이 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 수직이라 하고, 기호로 $l \perp \alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점 O를 수선의 발이라고 한다. ◎ 예제 01, 02를 설명한다. ◎ 문제 2, 3, 4, 5, 6번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	두 직선이 이루는 각의 크기는 보통 작은 쪽의 각을 생각하도록 지도한다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계를 이해한다.	

1 공간도형

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있게 한다.

② 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 직선, 평면의 위치관계	평면을 결정하는 조건
	공간에서의 위치 관계
02 삼수선의 정리	삼수선의 정리
	두 평면이 이루는 각
03 정사영	정사영
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 130 쪽

1 공간도형

정다면체

공간에는 서로 다른 모양의 수많은 다면체가 존재한다. 이 다면체 중에서 각 면이 모두 합동이고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체로 다섯 종류뿐이다.

정다면체는 고대 그리스에서 처음으로 연구하기 시작하였고, 수학자들은 정다면체를 가장 아름답고 완벽한 도형으로 생각하여 많은 관심을 가졌다. 그리고 15세기에 이르러 다섯 종류의 정다면체가 그 안에 서로 다른 정다면체를 품고 품으며 끝없이 순환한다는 성질을 발견하였다. 정다면체가 순환하는 경로는 '정사면체 ← 정육면체 ← 정십이면체 ← 정이십면체 ← 정팔면체 ← 정사면체' 로 유일한데, 이 순서를 지키면 정다면체는 자기 자신으로 되돌아올 수 있다.

이와 같은 정다면체의 순환은 정다면체의 모서리의 길이와 면과 면 사이의 각도를 이용하여 알아낼 수 있다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 142쪽

다섯 종류의 정다면체에서 하나의 모서리를 공유하는 두 면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있을까?

들어가면서 정다면체는 각 면이 모두 합동인 정다각형으로, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 볼록한 대칭 구조를 보인다. 그렇기 때문에 수학자들은 오래 전부터 정다면체를 가장 아름답고 완전한 도형이라고 불렀다.

기본적으로 정다면체는 각 면의 중심을 잇거나 모서리의 중점을 이으면 그 속에 새로운 정다면체를 만들 수 있다. 수학자들은 이런 정다면체의 순환 중에서 모든 경우의 수를 따져 하나의 흐름으로 서로를 연결할 수 있는 경로를 찾아냈다. 수학자들은 이를 '정다면체의 순환'이라고 불렀다.

실제로 정다면체의 순환은 각 정다면체의 모서리의 길이와 면과 면 사이의 각도가 철저하게 계산된 결과다. 예를 들어 정사면체의 한 모서리 길이와 정육면체 한 모서리의 길이는 2 : 1의 비를 따른다. 그리고 정사면체 면과 면 사이의 각도는 70.529°이다.

이 단원에서는 공간에서의 점, 선, 면들 사이의 관계를 이해하고, 이들 관계에 대한 간단한 증명을 하고, 이를 활용하는 방법에 대해 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.	상	공간에서 직선, 평면 사이에 어떤 위치 관계가 가능한지 추측하고, 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
	중	직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계를 이해한다.
	하	직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계를 말할 수 있다.
2. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	삼수선의 정리를 이해하고, 보조선을 긋지 않아도 되는 문제를 해결할 수 있다.
	하	주어진 그림에서 삼수선의 정리를 말할 수 있다.
3. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다.	상	정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있으며, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	정사영 도형을 쉽게 구할 수 있거나 이면각의 크기가 주어진 경우 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다.
	하	정사영의 뜻을 말할 수 있다.

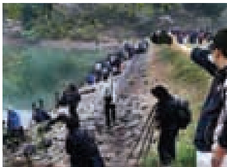
교과서 131 쪽

01 직선, 평면의 위치 관계

● 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

평면을 결정하는 조건은 무엇인가?

생각 열기 **삼각대**



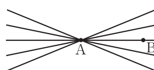
온라인 커뮤니티 게시판에 '삼각대 필요 없는 사진사' 라는 사진이 게재되어 화제가 되었다. 사진에는 많은 사람들이 삼각대를 펼치고 사진을 찍는 데 비해, 한 남자만이 한쪽 팔을 쭉 뻗고 카메라를 든 채로 사진을 찍고 있는 모습이 담겨 있다. 이 남자는 2012년 런던 올림픽에서 사격으로 금메달을 획득한 진종오 선수로, 권총 대신 카메라를 합성한 것이다.

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 카메라를 세워 놓고 사진을 촬영할 때 흔들리지 않도록 지면에 고정시키려면 몇 개의 다리가 필요한지 말하여 보자.
2. 사진을 촬영할 때 카메라를 고정시키는 삼각대와 알코올램프를 사용할 때 필요한 삼발이는 모두 다리가 3개이다. 삼각대와 삼발이의 다리가 3개인 이유에 대하여 알아보자.

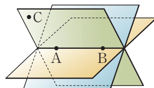
평면이 결정되는 조건에 대하여 알아보자.

공간에서 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많이 존재하지만 이들 직선 중에서 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선은 오직 하나만 존재한다. 따라서 서로 다른 두 점은 하나의 직선을 결정한다.



● 공간도형에서 보통 점은 A, B, C, …와 같이 알파벳 대문자로 나타내고, 직선은 l, m, n, …과 같이 알파벳 소문자로 나타낸다. 또 평면은 α, β, γ, …와 같이 그리스 알파벳 소문자로 나타낸다.

이와 마찬가지로 공간에서 두 점 A, B를 지나는 평면은 무수히 많이 존재하지만 이들 평면 중에서 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 오직 하나만 존재한다. 따라서 한 직선 위에 있지 않은 세 점은 하나의 평면을 결정한다.



01 직선, 평면의 위치 관계

소단원 지도 목표

① 평면을 결정하는 조건을 이해하게 한다.
② 공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.
③ 공간에서 직선과 평면의 위치 관계를 이해하게 한다.
④ 공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 직선과 평면의 위치 관계는 중학교에서 배운 평면도형의 위치 관계 개념을 공간도형으로 확장하여 의미를 쉽게 이해시키도록 한다.
2. 공간도형의 성질은 관찰과 직관에 의해 이해시킨 후 증명을 하게 한다.
3. 공간에서 두 평면의 평행에 관한 성질과 정리를 증명을 통해 이해할 수 있게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 교선(交線, line of intersection)

생각 열기 참/고/자/료

엄청난 크기의 비행기의 바퀴가 3개인 이유는 무엇일까?
이는 '평면의 결정조건' 과 밀접한 연관이 있다. 평소 아무렇게나 세워 놓고 사진을 찍는 카메라 삼각대를 떠올린다면 쉽게 이해할 수 있다. 3개의 다리는 바닥이 평평하지 않아도 수평을 유지하는 데 큰 어려움이 없다. 하지만 4개의 다리가 평면을 결정하기 위해서는 4개의 다리가 동일한 평면에 있어야 한다. 이는 바닥이 평평하지 않아 흔들거리는 책상이나 의자를 통해 쉽게 알 수 있다.
이와 같이 평면의 결정조건을 이해한다면 자동차보다 엄청나게 큰 비행기의 바퀴가 4개가 아닌 3개인 이유도 쉽게 유추해 낼 수 있다. 즉, 하늘을 날아야 하는 비행기는 무게를 줄이기 위해 바퀴를 3개로 최소화했고, 비행기가 착륙할 때 바닥이 평평하지 않아도 쓰러지지 않게 비행기의 가장 무거운 날개 쪽에 2개의 바퀴를 달고 앞쪽에 1개의 바퀴를 달아 균형을 잡게 설계되었다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 사진을 촬영할 때 움직이지 않도록 고정시키는 삼각대의 다리가 3개인 이유를 토론을 통해 유추해 봄으로써 평면의 결정조건에 대하여 생각해 보게 하려는 것이다.

1. 3개

2. 바닥이 평평하지 않아도 수평을 유지할 수 있기 때문이다.

교과서 132 쪽

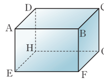
일반적으로 공간에서 다음과 같은 경우에 평면이 하나로 결정된다.

평면의 결정조건

(1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점 (2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점
(3) 한 점에서 만나는 두 직선 (4) 평행한 두 직선



보기 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서
(1) 세 점 A, B, C (2) 직선 AB와 점 C
(3) 직선 AB와 직선 BC (4) 직선 AD와 직선 BC
는 모두 하나의 평면 ABCD를 결정한다.



문제 1 공간에서 서로 다른 네 점 A, B, C, D 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다고 할 때, 이 네 점에 의하여 결정되는 서로 다른 평면의 개수의 최솟값과 최댓값을 각각 구하여라.

공간에서 위치 관계는 어떠한 것이 있는가?

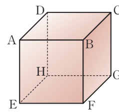
공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계는 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계

(1) 한 점에서 만난다. (2) 평행하다. (3) 꼬인 위치에 있다.



문제 2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음을 구하여라.
(1) 모서리 AB와 만나는 모서리
(2) 모서리 AB와 평행한 모서리
(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리

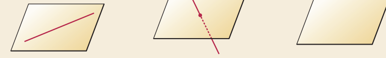


교과서 133 쪽

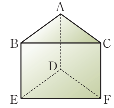
공간에서 직선과 평면의 위치 관계는 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

공간에서 직선과 평면의 위치 관계

(1) 포함된다. (2) 한 점에서 만난다. (3) 평행하다.



문제 3 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 면 ABC와 다음 위치 관계에 있는 모서리를 모두 구하여라.
(1) 포함된다.
(2) 한 점에서 만난다.
(3) 평행하다.

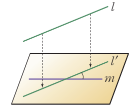


공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다.

한편 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않으므로 두 직선이 이루는 각을 다음과 같이 정한다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l과 m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 l을 직선 m과 한 점에서 만나도록 평행이동한 직선을 l'이라고 하면 두 직선 l'과 m은 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l'과 m이 이루는 각을 두 직선 l과 m이 이루는 각이라고 한다.



두 직선이 이루는 각의 크기는 보통 크기가 작은 쪽의 각을 생각한다.

특히 두 직선 l과 m이 이루는 각이 직각일 때, 두 직선 l과 m은 수직이라 하고, 기호로

$$l \perp m$$

과 같이 나타낸다.

1

목표| 평면의 결정조건을 이용하여 공간에서 결정되는 평면의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 네 개의 점 A, B, C, D에 대하여 평면은 한 직선 위에 있지 않은 세 점에 의해 결정되므로 평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ACD, 평면 BCD이다. 이 평면이 모두 서로 다른 평면일 때, 평면의 개수는 최대가 된다.
한편 네 개의 평면이 모두 같은 평면, 즉 네 점이 모두 한 평면 위에 있는 경우 평면의 개수는 최소가 된다.
따라서 구하는 평면의 개수의 최솟값은 **1**, 최댓값은 **4**이다.

다른 풀이| 서로 다른 평면의 개수의 최댓값은 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.
네 개의 점 중 서로 다른 세 점에 의하여 한 평면이 결정되므로 구하는 평면의 개수는 $_4C_3=4$

2

목표| 공간에서의 서로 다른 두 직선의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **모서리 AD, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 BF**
(2) **모서리 DC, 모서리 EF, 모서리 HG**
(3) **모서리 CG, 모서리 DH, 모서리 HE, 모서리 FG**

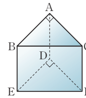
3

목표| 공간에서의 직선과 평면의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **모서리 AB, 모서리 BC, 모서리 CA**
(2) **모서리 AD, 모서리 BE, 모서리 CF**
(3) **모서리 DE, 모서리 EF, 모서리 FD**

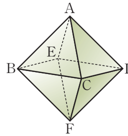
교과서 134 쪽

보기 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 직선 DF를 평행이동하면 직선 AC와 일치하고, 두 직선 AB, AC가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 두 직선 AB, DF가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

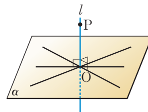


문제 4 오른쪽 그림과 같은 정팔면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

(1) 직선 BC와 직선 BE
(2) 직선 AB와 직선 CD
(3) 직선 AE와 직선 DF



공간에서 직선 l이 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 수직이라 하고, 기호로 $l \perp \alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점 O를 수선의 발이라고 한다.



① 예제 01 평면 α와 한 점 O에서 만나는 직선 l이 평면 α 위의 점 O에서 만나는 서로 다른 두 직선 a, b와 수직이면 직선 l과 평면 α는 수직임을 증명하여라.

평면 α와 직선 l이 한 점 O에서 만나므로 $l \perp \alpha$임을 보이려면 직선 l이 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선과 수직임을 보이면 된다.

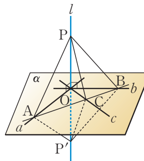
증명 오른쪽 그림과 같이 두 직선 a, b 위에 각각 점 A, B를 잡고, 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선을 c, 직선 AB와 직선 c의 교점을 C라고 하자.
직선 l 위에 $\overline{OP}=\overline{OP'}$인 두 점 P, P'을 잡으면 두 직선 a, b는 모두 $\overline{PP'}$의 수직이등분선이 된다.

$\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\overline{BP}=\overline{BP'}$, $\overline{AB}$는 공통

따라서 $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$이므로 $\angle PAC = \angle P'AC$이다.

$\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\angle PAC = \angle P'AC$, $\overline{AC}$는 공통

따라서 $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$이므로 $\overline{PC}=\overline{P'C}$이다.
삼각형 PCP'은 이등변삼각형이고 점 O는 $\overline{PP'}$의 중점이므로 $\overline{PP'} \perp \overline{OC}$ 즉, $l \perp c$이다.
따라서 직선 l은 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l \perp \alpha$이다.



본문 해설

① 직선 l이 평면 α에 수직임을 증명할 때, 평면 α 위의 평행하지 않는 두 직선은 만나는 두 직선을 의미한다. 즉, 꼬인 위치의 두 직선이 아님을 유의하도록 한다.
한편 직선 l이 평면 α와 수직이 되려면 직선 l이 평면 α 위의 모든 직선과 수직이 됨을 보여야 하지만 꼭 그렇게 할 필요는 없다.
한 점에서 만나거나 평행한 두 직선에 의해서 하나의 평면이 결정되기 때문에 직선 l이 평면 α 위의 만나는 두 직선에 대해서만 수직임을 보여 주면 된다. 이때 직선 l은 만나는 두 직선이 이루는 평면과 수직이다.
또 평면 위의 직선들은 평행이동하여 직선과 평면이 만나는 점을 지나도록 이동시킬 수 있으므로 한 직선이 평면과 수직이라면 그 직선은 평면 위의 모든 직선들과 수직이다. 즉, 두 직선은 수직으로 만난다.

4

목표 공간에서의 두 직선의 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

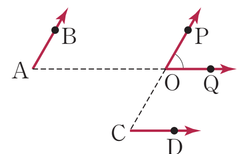
풀이 (1) 사각형 BCDE는 정사각형이므로 직선 BC와 직선 BE가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

(2) 직선 CD를 평행이동하면 직선 BE와 일치하고, 삼각형 ABE가 정삼각형이므로 직선 AB와 직선 CD가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

(3) 직선 DF를 평행이동하면 직선 AB와 일치하고, 삼각형 ABE가 정삼각형이므로 직선 AE와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

지/도/자/료 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각

꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각을 구할 때는 어느 한 직선을 평행이동시켜 다른 직선과 만나게 하였을 때, 이 두 직선이 이루는 각을 구하도록 한다.
이를테면 두 반직선 AB와 CD가 있을 때, 임의의 점 O에서 두 반직선 AB, CD에 평행한 두 반직선 OP, OQ를 그으면 $\angle POQ$는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이것이 두 반직선 AB와 CD(또는 두 직선 AB, CD)가 이루는 각으로 생각할 수 있다.

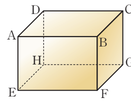


교과서 135 쪽

문제 5 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 AB와 수직인 면

(2) 면 ABCD와 수직인 모서리

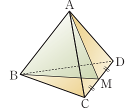


예제 02 정사면체 ABCD에서 모서리 CD의 중점을 M이라고 할 때, 모서리 CD와 면 ABM이 수직임을 증명하여라.

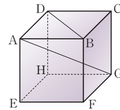
증명 삼각형 ACD와 삼각형 BCD는 정삼각형이고, 점 M은 모서리 CD의 중점이므로

$\overline{CD}\perp\overline{AM}$, $\overline{CD}\perp\overline{BM}$

따라서 모서리 CD가 면 ABM 위의 점 M에서 만나는 두 선분 AM, BM과 수직이므로 모서리 CD와 면 ABM은 수직이다.



문제 6 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 대각선 AG와 선분 BD가 이루는 각의 크기를 구하여라.



공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계에 대하여 알아보자.

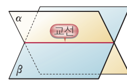
공간에서 서로 다른 두 평면은 만나는 경우와 만나지 않는 경우가 있다.

서로 다른 두 평면 α, β가 만나는 경우, 만나는 점들의 집합은 직선을 이룬다. 이때 이 직선을 두 평면의 교선이라고 한다.

❶ 한편 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않으면 두 평면 α, β는 평행하다고 하며, 기호로

$$\alpha /\!/ \beta$$

와 같이 나타낸다.

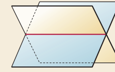


교과서 136 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

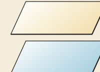
공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계

(1) 만난다.



한 직선을 공유한다.

(2) 평행하다.



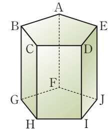
공유하는 점이 없다.

문제 7 오른쪽 그림과 같은 오각기둥에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 AF가 교선인 면

(2) 면 BGHC와 만나는 면

(3) 서로 평행한 면



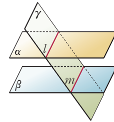
예제 03 평행한 두 평면 α, β가 다른 평면 γ와 만나서 생기는 교선을 각각 l, m이라고 할 때, $l /\!/ m$임을 증명하여라.

증명 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다.

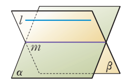
따라서 평면 α 위에 있는 직선 l과 평면 β 위에 있는 직선 m도 만나지 않는다.

그런데 두 직선 l, m은 모두 한 평면 γ 위에 있으므로

$l /\!/ m$이다.



문제 8 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 평면 α가 평행하고 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선을 m이라고 할 때, $l /\!/ m$임을 증명하여라.



5

목표| 공간에서 직선과 평면의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **면 AEHD, 면 BFGC**

(2) **모서리 AE, 모서리 BF, 모서리 CG, 모서리 DH**

6

목표| 직선 BD와 평면 ACG가 수직임을 보여 주어진 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 선분 BD는 평면 ACG 위의 두 직선 AC, CG와 수직이므로 선분 BD는 평면 ACG와 수직이다.

선분 BD는 평면 ACG와 수직이므로 평면 ACG 위의 모든 직선과 수직이므로 선분 BD는 선분 AG와 서로 수직이다.

따라서 대각선 AG와 선분 BD가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

본문 해설

❶ 두 평면이 서로 만나지 않을 때, 이 두 평면은 평행하다고 한다. 한편 평면은 꼬인 위치를 가질 수 없다. 그 이유는 평행하지 않은 두 평면을 계속 확장해 나가면 반드시 만나기 때문이다.

7

목표| 공간에서의 서로 다른 두 평면의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

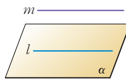
풀이| (1) **면 ABGF와 면 AFJE**

(2) **면 ABCDE, 면 ABGF, 면 CHID, 면 FGHIJ**

(3) **면 ABCDE와 면 FGHIJ**

교과서 137 쪽

문제 9 오른쪽 그림과 같이 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 평면 α가 있다. 두 직선 l과 m이 평행할 때, 평면 α와 직선 m이 평행함을 증명하여라.



예제 04 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나는 두 직선 l, m이 모두 평면 α에 평행할 때, 두 직선 l, m을 포함하는 평면 β는 α와 평행함을 증명하여라.

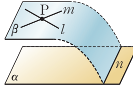
증명 두 평면 α, β가 평행하지 않다고 가정하면 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β는 교선 n을 공유한다. 이때 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이므로

$$l /\!/ n,\ m /\!/ n$$

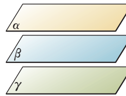
이고, 세 직선 l, m, n이 모두 평면 β 위에 있으므로

$$l /\!/ m$$

이다. 이것은 두 직선 l, m이 한 점 P에서 만나는 것에 모순이다.
따라서 평면 α와 β는 평행하다.



문제 10 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 두 평면 α와 β가 평행하고, 두 평면 β와 γ가 평행하면 두 평면 α와 γ가 평행함을 증명하여라.



사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 말하고, 직육면체를 이용하여 그 이유를 설명하여 보자.

(1) $l /\!/ m$, $m /\!/ n$이면 $l /\!/ n$이다.
(2) $l /\!/ \alpha$, $l /\!/ \beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다.
(3) $\alpha /\!/ l$, $\alpha /\!/ m$이면 $l /\!/ m$이다.

8

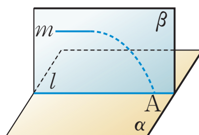
목표| 직선과 평면의 위치 관계를 이용하여 주어진 평면과 교선은 직선과 평행함을 증명할 수 있게 한다.

증명| 조건에 의하여 두 직선 l, m은 평면 β 위에 있다.
그런데 $l /\!/ \alpha$이고 직선 m은 평면 α 위에 있으므로 두 직선 l, m은 만나지 않는다.
따라서 $l /\!/ m$이다.

9

목표| 직선과 평면의 위치 관계를 이용하여 평행한 두 직선 가운데 한 직선을 포함하는 평면은 다른 직선과 서로 평행함을 증명할 수 있게 한다.

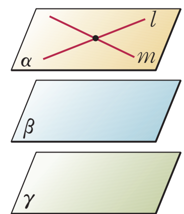
증명| $l /\!/ m$이므로 두 직선 l과 m은 한 평면 β를 결정한다.
이때 두 평면 α와 β의 교선은 l이다.
평면 α와 직선 m이 평행하지 않다고 가정하면 평면 α와 직선 m은 한 점에서 만난다. 이 점을 A라고 하면 점 A는 두 평면 α와 β의 교선 l 위에 있다. 즉, 점 A는 두 직선 l, m 위에 있으므로 $l /\!/ m$에 모순이다.
따라서 평면 α는 직선 m과 평행하다.



10

목표| 두 평면의 위치 관계를 이용하여 공간에서 서로 다른 두 평면이 서로 평행함을 증명할 수 있게 한다.

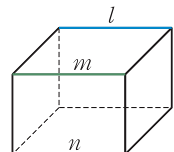
증명| 평면 α에서 만나는 두 직선 l, m을 그으면
$\alpha /\!/ \beta$이므로
$l /\!/ \beta$, $m /\!/ \beta$ …… ①
그런데 $\beta /\!/ \gamma$이므로 직선 l 또는 m이 평면 γ와 한 점에서 만나면 직선 l 또는 m은 평면 β와도 한 점에서 만나므로 ①에 모순이다.
따라서 $l /\!/ \gamma$, $m /\!/ \gamma$이므로 두 직선 l, m을 포함하는 평면 α는 평면 γ와 평행하다.



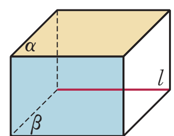
사고력 기르기 추론

출제 의도| 공간에서 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 말하고, 그 이유를 설명할 수 있게 한다.

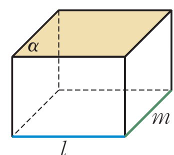
풀이| (1) (참)
오른쪽 그림에서
$l /\!/ m,\ m /\!/ n \Longrightarrow l /\!/ n$



(2) (거짓)
오른쪽 그림에서 윗면을 α, 앞면을 β라고 하면 $l /\!/ \alpha$, $l /\!/ \beta$이지만 $\alpha \perp \beta$이므로 두 평면 α와 β는 평행하지 않다.



(3) (거짓)
오른쪽 그림에서 윗면을 α라고 하면 $\alpha /\!/ l$, $\alpha /\!/ m$이지만 $l \perp m$이므로 두 직선 l과 m은 평행하지 않다.



02 삼수선의 정리

소단원 지도 목표

① 삼수선의 정리를 이해하게 한다.
② 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.
③ 이면각의 뜻을 이해하고, 그 크기를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 삼수선의 정리는 두 가지 조건을 만족하면 나머지 한 조건이 성립하게 됨을 그림을 통해 이해하게 한다.

2. 삼수선의 정리는 직선과 평면이 수직임을 증명하는 데 쓰이는 중요한 정리임을 알게 한다.

교과서 138 쪽

02 삼수선의 정리

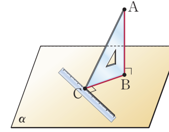
● 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

삼수선의 정리란 무엇인가?

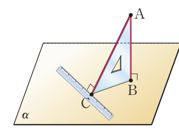
탐구 활동

●준비물
자, 직각 삼각자, 각도기

다음 그림과 같이 직각 삼각자 ABC를 변 AB가 평면 α에 수직이 되도록 세울 때, 물음에 답하여 보자.



〈그림 1〉

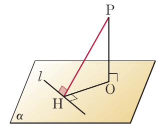


〈그림 2〉

1. 〈그림 1〉과 같이 자를 직각 삼각자의 변 BC와 수직이 되도록 평면 α 위에 놓을 때, 변 AC와 자가 이루는 각의 크기를 각도기를 이용하여 구하여 보자.

2. 〈그림 2〉와 같이 자를 직각 삼각자의 변 AC와 수직이 되도록 평면 α 위에 놓을 때, 변 BC와 자가 이루는 각의 크기를 각도기를 이용하여 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 α 위의 한 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



이때 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이고 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다. 또 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{\mathrm{PO}}$와 $\overline{\mathrm{OH}}$에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다.

● $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이면 $\overline{\mathrm{PO}}$는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

그런데 $\overline{\mathrm{PH}}$는 평면 PHO 위에 있으므로

$$\overline{\mathrm{PH}}\perp l$$

이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha,\ \overline{\mathrm{OH}}\perp l\text{이면 }\ \overline{\mathrm{PH}}\perp l$$

새로 나온 용어와 기호

• 삼수선의 정리(三垂線—定理, theorem of three perpendiculars)
• 이면각(二面角, dihedral angle)
• 이면각의 변(二面角—邊, edge of dihedral angle)
• 이면각의 면(二面角—面, faces of a dihedral angle)
• 이면각의 크기(measure of a dihedral angle)

탐구 활동의 이해

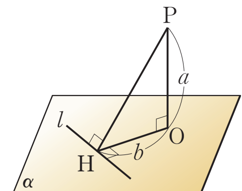
활동 목표 • 자, 직각 삼각자, 각도기를 이용한 구체적 조작 활동을 통하여 직관적으로 삼수선의 정리를 알게 하기 위한 것이다.

1. 90°

2. 90°

지/도/자/료

평면 α 밖의 한 점 P에서 평면 α 위의 직선 l까지의 거리는 삼수선의 정리를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.



점 P에서 평면 α까지의 거리를 $\overline{\mathrm{PO}}=a$, 점 O에서 직선 l까지의 거리를 $\overline{\mathrm{OH}}=b$라고 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이다.
직각삼각형 PHO에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{a^2+b^2}$

일반적으로 공간에서 직선과 평면의 수직 관계에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 **삼수선의 정리**라고 한다.

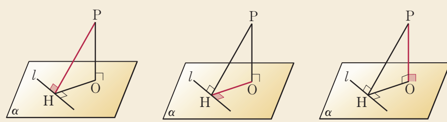
❶ **삼수선의 정리**

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 점 O를 지나지 않는 α 위의 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여

(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$

(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$

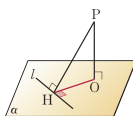
❷ (3) $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$



예제 01 삼수선의 정리 (2)를 증명하여라.

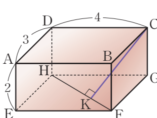
증명 $\overline{PO}\perp\alpha$이고, 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO}\perp l$이다.
또 $\overline{PH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$, $\overline{PH}$에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다. 그런데 $\overline{OH}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{OH}\perp l$이다.
따라서 다음이 성립한다.

$\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$



문제 1 삼수선의 정리 (3)을 증명하여라.

예제 02 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{AE}=2$인 직육면체에서 점 C에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 K라고 할 때, 선분 CK의 길이를 구하여라.



풀이 $\overline{CG}\perp$(평면 EFGH), $\overline{CK}\perp\overline{HF}$이므로 삼수선의 정리 (2)에 의하여 $\overline{GK}\perp\overline{HF}$

$\triangle HFG=\frac{1}{2}\overline{HG}\times\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{HF}\times\overline{GK}=6$에서 $\overline{HF}=5$이므로 $\overline{GK}=\frac{12}{5}$

따라서 직각삼각형 CGK에서 $\overline{CK}=\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{GK}^2}=\frac{2\sqrt{61}}{5}$

답 $\frac{2\sqrt{61}}{5}$

본문 해설

❶ 삼수선의 정리에서 세 조건

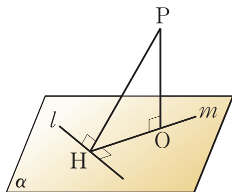
$\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\alpha$

중에서 두 개의 조건이 성립하면 나머지 한 조건이 성립하게 된다.

❷ 삼수선의 정리 (3)에 의하여 평면 α 밖의 한 점 P에서 평면 α에 수선을 다음과 같이 작도할 수 있다.

① 평면 α 위에 한 직선 l을 긋는다.

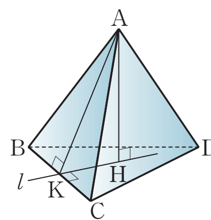
② 점 P에서 l에 수선을 내리고 그 수선의 발을 H라고 한다.



③ 평면 α 위에서 점 H를 지나고 l에 수직인 직선 m을 긋는다.

④ 점 P에서 직선 m에 내린 수선의 발을 O라고 한다. 이때 직선 PO가 평면에 내린 수선이다.

이를 이용하여 다음 그림과 같은 사면체의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 수선을 발을 내려 보자.

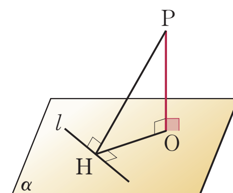


꼭짓점 A에서 직선 BC에 수선을 내리고 수선을 발을 K라고 한다. 또 평면 BCD에서 점 K를 지나고 직선 BC에 수직인 직선 l을 긋는다. 이때 점 A에서 직선 l에 수선을 내리고 그 수선의 발을 H라고 하면 점 H가 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발이다.

1

목표| 삼수선의 정리 (3)을 증명할 수 있게 한다.

증명| $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$이므로 직선 l은 평면 PHO와 수직이다.
이때 $\overline{PO}$는 평면 PHO 위에 있으므로



$\overline{PO}\perp l$이다.
그런데 $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이고 직선 l과 $\overline{OH}$는 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO}\perp\alpha$이다.
따라서 $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

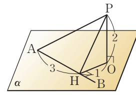
2

목표| 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

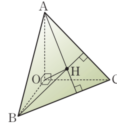
풀이| $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$
삼각형 PHO는 직각삼각형이므로
$\overline{PH}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
또 삼각형 PAH도 직각삼각형이므로
$\overline{AP}=\sqrt{3^2+(\sqrt{5})^2}=\mathbf{\sqrt{14}}$

교과서 140 쪽

문제 2 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{OP}=2$, $\overline{OH}=1$, $\overline{AH}=3$일 때, 선분 AP의 길이를 구하여라.

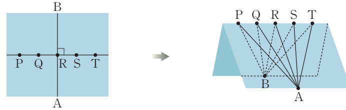


발전 **문제 3** 오른쪽 그림과 같은 사면체에서 서로 수직으로 만나는 세 모서리 OA, OB, OC에 대하여 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선과 점 B에서 모서리 AC에 내린 수선의 교점을 H라고 할 때, 선분 OH는 면 ABC와 수직임을 증명하여라.



두 평면이 이루는 각은 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 직사각형 모양의 종이에 점을 표시한 후 반으로 접고, 적당한 각으로 펼쳐 세웠다. 물음에 답하여 보자.



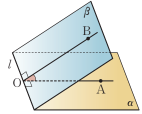
1. 각 APB, 각 AQB, 각 ARB, 각 ASB, 각 ATB 중에서 크기가 가장 큰 각을 찾아보자.
2. 종이를 접고 나서 적당한 각으로 펼쳐 세웠을 때 생기는 두 면이 이루는 각으로 적당한 것은 어느 것인지 토의하여 보자.

교과서 141 쪽

공간에서 두 평면이 이루는 각에 대하여 알아보자.

평면 위의 한 직선은 그 평면을 각각 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 만날 때, 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어지는 도형을 **이면각**이라 하고, 이때 직선 l을 **이면각의 변**, 두 반평면 α, β를 각각 **이면각의 면**이라고 한다.



이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, ∠AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 한다.

두 평면이 만나면 네 개의 이면각이 생기는데, 이 중 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라고 한다.

● 두 평면이 이루는 각은 보통 크기가 작은 쪽의 각을 생각한다.

특히 두 평면 α, β가 이루는 각이 직각일 때, 두 평면 α, β는 수직이라 하고, 기호로

$$\alpha \perp \beta$$

와 같이 나타낸다.

예제 03 정사면체에서 두 면이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같은 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하자. 모서리 BC의 중점을 M이라고 하면

$$\overline{AM}\perp\overline{BC},\ \overline{DM}\perp\overline{BC}$$

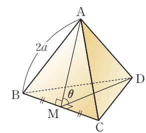
이므로 $\angle AMD=\theta$이다.

또 삼각형 AMD에서

$$\overline{AM}=\sqrt{3}a,\ \overline{DM}=\sqrt{3}a,\ \overline{DA}=2a$$

이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{AM}^2+\overline{DM}^2-\overline{DA}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{DM}}=\frac{(\sqrt{3}a)^2+(\sqrt{3}a)^2-(2a)^2}{2\times\sqrt{3}a\times\sqrt{3}a}=\frac{1}{3}$$



● $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

답 $\frac{1}{3}$

3

목표| 삼수선의 정리를 이용하여 사면체의 한 꼭짓점에서 밑면의 수심에 그은 직선이 밑면과 수직임을 증명할 수 있게 한다.

증명| 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 E라고 하면

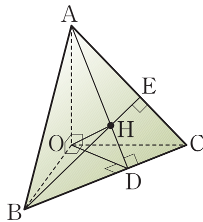
$\overline{OA}\perp\overline{OB}$, $\overline{OA}\perp\overline{OC}$이므로

$\overline{OA}\perp$(면 OBC)이고,

$\overline{AD}\perp\overline{BC}$이므로 $\overline{OD}\perp\overline{BC}$

따라서 $\overline{BC}\perp$(면 ODA)이므로

$\overline{BC}\perp\overline{OH}$ …… ①



$\overline{OB}\perp\overline{OC}$, $\overline{OB}\perp\overline{OA}$이므로

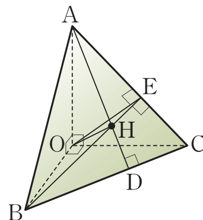
$\overline{OB}\perp$(면 OCA)이고,

$\overline{BE}\perp\overline{AC}$이므로 $\overline{OE}\perp\overline{AC}$

따라서 $\overline{AC}\perp$(면 OEB)이므로

$\overline{AC}\perp\overline{OH}$ …… ②

①, ②에서 $\overline{OH}\perp$(면 ABC)이다.



탐구 활동의 이해

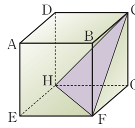
활동 목표 • 직사각형 모양의 종이를 접어서 이면각을 만들고, 두 면이 이루는 각으로 적당한 것을 찾아 이면각의 크기를 정할 수 있게 하려는 것이다.

1. 점 A, B가 고정된 점이므로 이 두 점과 점 P, Q, R, S, T를 각각 연결하면 다섯 개의 이등변삼각형이 생긴다. 여기서 각 AXB의 크기는 점 X가 점 R에서 멀리 떨어질수록 작아지므로 크기가 가장 큰 각은 각 ARB이다.

2. 두 면이 이루는 각으로 적당한 것은 두 면의 교선 위의 점 어디에서 측정하여도 일정한 것이다.

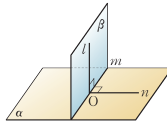
교과서 142 쪽

문제 4 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



예제 04 평면 α에 수직인 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α와 수직임을 증명하여라.

증명 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라고 하자.
평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m에 수직인 직선 n을 그으면 $l\perp m$
그런데 $l\perp\alpha$이므로 $l\perp n$
즉, 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 평면이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\alpha\perp\beta$이다.



문제 5 평면 α에 수직인 평면 β 위의 한 점 A에서 α, β의 교선에 내린 수선의 발을 O라고 하면 $\overline{\mathrm{AO}}\perp\alpha$임을 증명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류가 존재한다. 이들 정다면체의 이면각을 나타내면 다음과 같다.

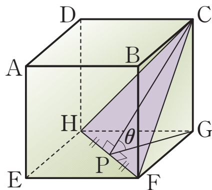
정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체

정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기의 합을 구하여라.

4

목표| 이면각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정육면체의 한 변의 길이를 1이라 하고, 꼭짓점 G에서 선분 HF에 그은 수선의 발을 P라고 하면 삼수선의 정리에 의하여 삼각형 CPG는 직각삼각형이다.



$\overline{\mathrm{CG}}=1$, $\overline{\mathrm{PG}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

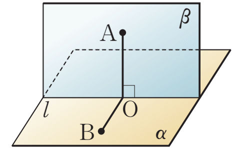
따라서 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 이면각 θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PG}}}{\overline{\mathrm{CP}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

5

목표| 한 평면에 수직인 평면 위에 한 점에서 두 면의 교선에 내린 수선은 평면과 수직임을 증명할 수 있게 한다.

증명| 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 l이라고 하면 $\overline{\mathrm{AO}}\perp l$



평면 α 위에 $\overline{\mathrm{BO}}\perp l$인 점 B를 잡으면 $\alpha\perp\beta$이므로 $\overline{\mathrm{AO}}\perp\overline{\mathrm{BO}}$

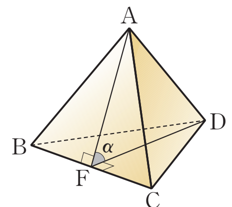
따라서 $\overline{\mathrm{AO}}\perp l$, $\overline{\mathrm{AO}}\perp\overline{\mathrm{BO}}$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}\perp\alpha$

단원 과제

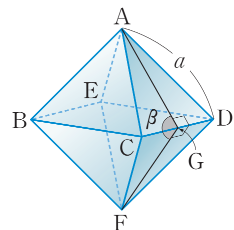
목표| 정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 정사면체의 이면각의 크기를 α라고 하면 삼각형 AFD에서 삼각형의 성질에 의하여



$\cos\alpha=\frac{1}{3}$

오른쪽 그림과 같이 정팔면체의 한 모서리의 길이를 a라 하고, 이면각의 크기를 β라고 하면



$\overline{\mathrm{AG}}=\overline{\mathrm{FG}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{2}a$

삼각형 AFG에서 $\cos\beta=-\frac{1}{3}$

따라서 $\cos\alpha+\cos\beta=0$이므로

$\cos\alpha=-\cos\beta=\cos(\pi\pm\beta)$

$0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$이므로

$\alpha=\pi-\beta$이고 $\alpha+\beta=\pi$

즉, 정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기의 합은 π이다.

03 정사영

소단원 지도 목표

① 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
② 선분의 길이와 그 정사영의 길이 사이의 관계를 이해하게 한다.
③ 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 평면 α 위로의 정사영은 평면 α에 수직인 방향으로 평행한 빛을 비출 때 생기는 그림자의 의미임을 이해하게 한다.
2. 한 평면에 수직인 직선의 그 평면 위로의 정사영은 점임을 유의하게 한다.
3. 선분 AB와 평면 α가 평행할 때, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라고 하면 이 두 선분의 길이는 같음을 이해하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 정사영(正射影, orthogonal projection)

교과서 143 쪽

03 정사영

● 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

정사영이란 무엇인가?

생각 열기

태양열 발전

태양열 발전이란 태양 에너지를 모아서 열로 변환하고 열기관을 통해 그 열을 전력으로 변환하는 발전 방식이다.
태양열 발전 장치 중 태양으로부터 오는 에너지를 모아서 열로 변환하는 집열판은 태양열 발전에서 가장 중요한 장치로, 보통 투명한 유리로 구성되는데 유리 이외에 투명 플라스틱이나 섬유 유리 등이 이용되기도 한다.

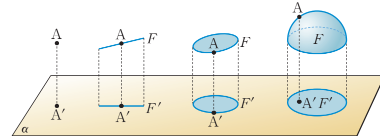


탐구 활동

직사각형 모양의 태양열 집열판이 지면과 일정한 각을 이루며 설치되어 있다. 햇빛이 지면에 수직으로 비칠 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 집열판과 지면이 이루는 각이 커질수록 집열판의 그림자의 넓이는 어떻게 변하는지 말하여 보자.
2. 집열판의 넓이와 집열판의 그림자의 넓이가 같을 때, 집열판과 지면이 이루는 각의 크기는 얼마인지 구하여 보자.

평면 α 위에 있지 않은 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발 A′을 점 A의 평면 α 위로의 **정사영**이라고 한다.
일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.



생각 열기 참/고/자/료

태양열 발전은 집열판을 이용하여 햇빛을 집중시켜 1000°C에 가까운 열을 얻은 다음 이 열을 이용하여 전기를 생산하는 것이다.
태양열 발전 시설은 대체로 접시/엔진 시스템, 홈통형 시스템, 전력 타워 시스템의 세 가지 형태로 나눌 수 있다. 이들 시스템은 모두 집중장치, 흡수장치, 전달 · 저장장치, 변환장치라는 네 개의 핵심장치로 구성된다. 집중장치는 햇빛을 한곳으로 집중시키며, 흡수장치는 집중장치를 통해서 집중된 햇빛을 흡수한 후 그 열에너지를 열전달 매체로 전달하는 역할을 한다. 또 전달 · 저장장치는 에너지 변환기로 전해주며, 변환장치는 전달된 에너지를 전기 에너지로 바꾼다.
태양 에너지는 기상 조건의 변화에 영향을 받기 때문에 보조 설비를 갖추어야 한다는 단점을 가진다.
그러나 태양 복사열은 지구상에서 최대의 신재생 에너지원으로 환경오염의 가능성이 적고 자급자족이 가능하며 무한하게 공급된다는 장점을 가진다. 태양열 발전은 향후 에너지 절감 및 대체 효과와 무공해 청정에너지 사용으로 환경개선 효과를 볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직사각형 모양의 태양열 집열판과 지면과 이루는 각에 따른 그림자의 크기의 변화를 통해 정사영의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1. 집열판과 지면이 이루는 각이 커질수록 집열판의 그림자의 넓이는 작아진다.
2. 집열판과 지면이 서로 평행할 때 집열판의 넓이와 집열판의 그림자의 넓이가 같아진다.
따라서 집열판과 지면이 이루는 각의 크기는 $0°$이다.

일반적으로 직선의 평면 위로의 정사영은 직선 또는 한 점이고, 다각형의 평면 위로의 정사영은 다각형 또는 선분이다.

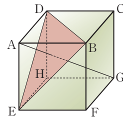
● 직선과 평면이 수직이면 직선의 평면 위로의 정사영은 한 점이고, 수직이 아니면 직선이다.

문제 1 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음을 구하여라.

(1) 대각선 AG의 평면 EFGH 위로의 정사영

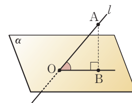
(2) 선분 BD의 평면 AEFB 위로의 정사영

(3) 삼각형 BDE의 평면 EFGH 위로의 정사영



오른쪽 그림과 같이 직선 l과 평면 α가 수직이 아니고 직선 l 위의 한 점 A의 평면 α 위로의 정사영을 점 B라고 할 때, 직선 l과 평면 α의 교점 O에 대하여 $\angle AOB$를 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라고 한다. 특히 $l \,/\!/\, \alpha$일 때, 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $0°$이다.

● 직선과 평면이 이루는 각은 크기가 작은 쪽의 각을 생각한다.



이제 선분의 길이와 그 선분의 정사영의 길이 사이의 관계에 대하여 알아보자.

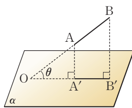
오른쪽 그림과 같이 평면 α에 수직이 아닌 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α의 교점을 O라고 하자. 이때 $\angle AOA'=\theta$라고 하면

$$\overline{OA'}=\overline{OA}\cos\theta,\ \overline{OB'}=\overline{OB}\cos\theta$$

이므로

$$\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}=(\overline{OB}-\overline{OA})\cos\theta=\overline{AB}\cos\theta$$

가 성립한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$$

보기 길이가 4인 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라고 할 때, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이면 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

문제 2 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $\overline{AB}=6$, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, 선분 A′B′의 길이

(2) $\overline{AB}=10$, $\overline{A'B'}=5\sqrt{2}$일 때, θ의 크기

❶ 도형의 넓이와 그 도형의 정사영의 넓이 사이의 관계에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 한 변 BC와 평면 α가 평행할 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 A′B′C′이라 하고, 평면 α와 삼각형 ABC를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

이때 변 BC를 포함하고 평면 α에 평행한 평면을 β라 하고, 평면 β와 직선 AA′의 교점을 A″이라고 하면

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''BC$$

이다. 또 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼수선의 정리 (2)에 의하여

$$\overline{A''H}\perp\overline{BC}$$

이다. 따라서 $\angle AHA''=\theta$이므로

$$\triangle A'B'C'=\triangle A''BC=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{A''H}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AH}\cos\theta=\triangle ABC\cos\theta$$

가 성립한다.

● $\overline{AA''}\perp\beta$, $\overline{AH}\perp\overline{BC}$이므로 $\overline{A''H}\perp\overline{BC}$

일반적으로 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

정사영의 넓이

도형 F의 평면 α 위로의 정사영을 F'이라 하고, 도형 F를 포함하는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ, 도형 F와 도형 F'의 넓이를 각각 S, S'이라고 하면

$$S'=S\cos\theta$$

보기 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고, 평면 β 위에 있는 넓이가 10인 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면 $S'=10\cos\frac{\pi}{3}=10\times\frac{1}{2}=5$

1

목표| 정사영의 뜻을 알고 선분과 삼각형의 정사영을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **선분 EG**

(2) **모서리 BA**

(3) 점 B, 점 D의 평면 EFGH 위로의 정사영이 각각 점 F, 점 H이므로 삼각형 BDE의 평면 EFGH 위로의 정사영은 **삼각형 FHE**이다.

2

목표| 선분의 정사영의 길이와 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

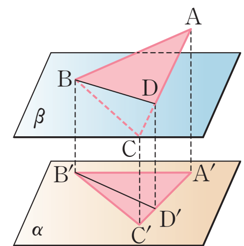
풀이| (1) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta=6\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3\sqrt{3}}$

(2) $\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

본문 해설

❶ △ABC의 어느 변도 평면 α에 평행하지 않은 경우도 $S'=S\cos\theta$임을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B를 지나고 평면 α에 평행인 평면 β를 만들어 직선 AC와 만나는 점을 D라 하고 점 D의 평면 α 위로의 정사영을 D′이라고 하면



$\triangle A'B'D'=\triangle ABD\cos\theta$

$\triangle B'C'D'=\triangle BCD\cos\theta$

이때 점 D가 변 AC 위에 있으면

$S'=\triangle A'B'D'+\triangle B'C'D'$

$=\triangle ABD\cos\theta+\triangle BCD\cos\theta$

$=\triangle ABC\cos\theta$

$=S\cos\theta$

3

목표| 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이의 관계를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 태양열 집열판의 그림자의 넓이가 $150\ \mathrm{m}^2$이므로 태양열 집열판의 넓이를 S라 하면

$150=S\cos 30^\circ$

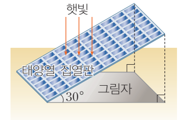
$S=\dfrac{150}{\cos 30^\circ}=150\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=100\sqrt{3}(\mathrm{m}^2)$

따라서 태양열 집열판의 넓이는 $\mathbf{100\sqrt{3}\ m^2}$이다.

교과서 146 쪽

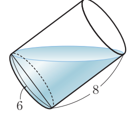


문제 3 오른쪽 그림과 같이 지면과 30°의 각도로 설치된 직사각형 모양의 태양열 집열판이 있다. 햇빛이 지면에 수직으로 비칠 때, 태양열 집열판의 그림자의 넓이가 $150\ \mathrm{m}^2$이다. 이때 태양열 집열판의 넓이를 구하여라.

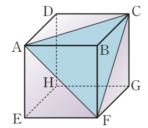




문제 4 밑면의 지름의 길이가 6, 높이가 8인 원기둥 모양의 컵에 물을 가득 채운 후 오른쪽 그림과 같이 기울여서 물의 양이 처음의 $\frac{1}{2}$만 남도록 하였다. 이때 타원 모양의 수면의 넓이를 구하여라.



예제 01 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 삼각형 AFC와 밑면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



● 한 변의 길이가 x인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$이다.

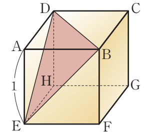
풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면 $\triangle\mathrm{AFC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFG이고 $\triangle\mathrm{EFG}=\frac{1}{2}a^2$

따라서 $\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

문제 5 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체가 있다. 삼각형 FHE의 평면 BDE로의 정사영의 넓이를 구하여라.



4

목표| 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 피타고라스 정리에 의하여 타원의 장축의 길이는

$\sqrt{6^2+8^2}=10$

타원 모양의 수면의 넓이를 S, 원기둥의 밑면의 넓이를 S', 수면과 밑면을 각각 포함하는 두 면 사이의 이면각을 θ라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{(\text{밑면인 원의 지름})}{(\text{수면인 타원의 장축의 길이})}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

$S'=\pi\times3^2=9\pi$이므로

$9\pi=S\times\dfrac{3}{5}$에서 $S=15\pi$

따라서 수면의 넓이는 $\mathbf{15\pi}$이다.

5

목표| 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이의 관계를 이용하여 이면각의 크기를 구하고, 정사영의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 삼각형 BDE는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 삼각형 BDE의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

또 삼각형 FHE의 넓이는 $\dfrac{1}{2}$이므로 평면 BDE와 평면 EFGH가 이루는 각을 θ라고 하면

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 FHE의 넓이를 S, 삼각형 FHE의 평면 BDE로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면

$S'=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

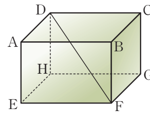
교과서 147 쪽

중단원 기초

[해답 p.216]

수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 대각선 DF와 서로 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 구하여라.

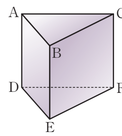


01 직선, 평면의 위치 관계
두 직선의 위치 관계

2 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 다음을 구하여라.

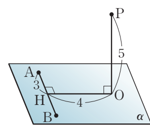
(1) 면 ABC와 만나는 면

(2) 면 ABC와 평행한 면



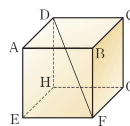
01 직선, 평면의 위치 관계
두 평면의 위치 관계

3 평면 α 위의 선분 AB와 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 한다. $\overline{\mathrm{PO}}=5$, $\overline{\mathrm{OH}}=4$, $\overline{\mathrm{AH}}=3$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}$의 길이를 구하여라.



02 삼수선의 정리

4 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 대각선 DF와 평면 AEFB가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



03 정사영

중/단/원 기초

1

목표| 공간에서의 서로 다른 두 직선의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| 대각선 DF와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 AB, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 CG, 모서리 HG, 모서리 HE의 **6**개이다.

2

목표| 공간에서의 서로 다른 두 평면의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **면 ADEB, 면 BEFC, 면 ADFC**

(2) **면 DEF**

3

목표| 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$

또 삼각형 APH도 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{3^2+(\sqrt{41})^2}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

4

목표| 선분의 정사영을 이용하여 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 선분 DF의 평면 AEFB로의 정사영은 선분 AF이다.

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{\mathrm{DF}}=\sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{2}a$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{DF}}\cos\theta$에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

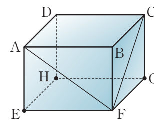
교과서 148 쪽

중단원 기본

[해답 p.216]

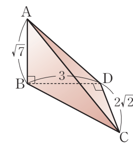
수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 세 점 E, G, H와 두 직선 AF, CF로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하여라.



01 직선, 평면의 위치 관계
평면의 결정조건

2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}\perp$(면BCD), $\overline{BD}\perp\overline{CD}$인 사면체에서 $\overline{AB}=\sqrt{7}$, $\overline{BD}=3$, $\overline{CD}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ACD의 넓이를 구하여라.

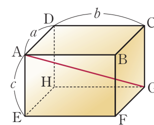


02 삼수선의 정리

3 사면체 ABCD에서 모서리 BC의 길이는 4, 삼각형 ABC의 넓이는 14, 삼각형 BCD의 넓이는 12이다. 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, 사면체 ABCD의 부피를 구하여라.

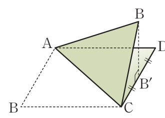
02 삼수선의 정리
이면각

4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{AE}=c$인 직육면체에서 대각선 AG가 평면 ABCD, AEHD, DHGC와 이루는 각의 크기를 각각 α, β, γ라고 할 때, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$의 값을 구하여라.



03 정사영

5 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD를 대각선 AC를 접는 선으로 하여 적당히 접었더니 꼭짓점 B의 평면 ACD 위로의 정사영 B′이 변 CD의 중점이 되었다. 평면 ACB와 평면 ACD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



03 정사영

중/단/원 기본

1

목표| 평면의 결정조건을 이해하게 한다.

풀이| 면 EGH, 면 AFC, 면 AFE, 면 AFG, 면 AFH, 면 CFE, 면 CFG, 면 CFH의 8개이다.

2

목표| 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구해 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AD}\perp\overline{DC}$
삼각형 ABD는 직각삼각형이므로
$\overline{AD}=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}=4$
따라서 삼각형 ACD는 직각삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=\mathbf{4\sqrt{2}}$

3

목표| 삼수선의 정리와 이면각을 이용하여 사면체의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 삼각형 ABC의 넓이가 14이므로 선분 AM의 길이는
$14=\frac{1}{2}\times4\times\overline{AM}$에서
$\overline{AM}=7$
평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 사면체의 높이는
$\overline{AH}=\overline{AM}\sin\frac{\pi}{3}=7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$
따라서 사면체의 부피는 $\frac{1}{3}\times12\times\frac{7\sqrt{3}}{2}=\mathbf{14\sqrt{3}}$

4

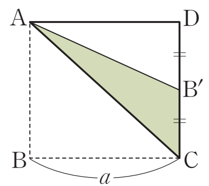
목표| 직선과 평면이 이루는 각을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직각삼각형 AGC, AGH, AGD에서
$\cos\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$, $\cos\beta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}$, $\cos\gamma=\frac{\overline{DG}}{\overline{AG}}$이므로
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$
$=\frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{a^2+c^2})^2+(\sqrt{b^2+c^2})^2}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2}$
$=\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=\mathbf{2}$

5

목표| 도형의 정사영을 이용하여 공간에서의 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a라고 하면



$\triangle ACD=\frac{1}{2}\square ABCD=\frac{1}{2}a^2$
삼각형 ACB의 평면 ACD 위로의 정사영은 삼각형 ACB′이고
$\triangle ACB'=\frac{1}{2}\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}a^2$
따라서 $\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a^2\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\mathbf{\frac{1}{2}}$

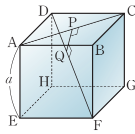
교과서 149 쪽

중단원 실력

[해답 p.216]

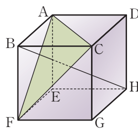
수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정육면체에서 선분 AC 위의 점 P와 선분 DF 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ가 두 선분 AC, DF와 각각 수직일 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.



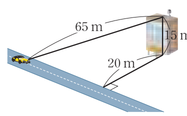
01 직선, 평면의 위치 관계
두 직선이 이루는 각

2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 대각선 BH는 평면 AFC와 수직임을 증명하여라.



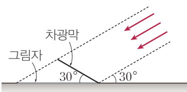
01 직선, 평면의 위치 관계
직선과 평면의 수직

3 오른쪽 그림과 같이 높이가 15 m인 건물과 직선 도로의 최단 거리가 20 m인 직선 도로가 있다. 이 건물의 옥상에서 최대 송신 거리가 65 m인 리모컨으로 도로 위를 움직이는 모형 자동차를 조종할 때, 리모컨으로 모형 자동차를 조종할 수 있는 도로의 총 길이를 구하여라.
(단, 직선 도로의 폭은 무시한다.)



02 삼수선의 정리

4 오른쪽 그림과 같이 햇빛이 운동장에 세워 놓은 차광막을 비추고 있다. 차광막과 지면이 이루는 각의 크기가 30°이고 그림자의 넓이가 12일 때, 차광막의 넓이를 구하여라.



03 정사영

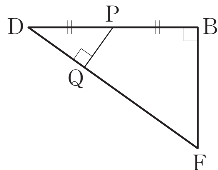
중/단/원 실력

1

목표| 공간에서 직선과 평면 사이의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BF}\perp\overline{AC}$이고, $\overline{BD}\perp\overline{AC}$이므로 $\triangle BDF\perp\overline{AC}$

따라서 점 P는 $\overline{BD}$ 위의 점이므로 사각형 ABCD의 대각선의 교점이다.



삼각형 BDF에서 $\overline{BF}=a$,

$\overline{DP}=\dfrac{\overline{DB}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $\overline{DF}=\sqrt{3}a$

$\triangle BDF \backsim \triangle QDP$이므로

$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{DP}}$에서

$\dfrac{a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\overline{PQ}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$

따라서 $\overline{PQ}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{6}a}$

2

목표| 공간에서 직선과 평면 사이의 관계를 이해하고, 직선이 평면에 수직임을 증명할 수 있게 한다.

증명| $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이고, (면 ABCD)$\perp\overline{DH}$이므로 $\overline{AC}\perp\overline{DH}$

따라서 $\overline{AC}\perp$(면 BHD)이므로

$\overline{AC}\perp\overline{BH}$ …… ①

$\overline{AF}\perp\overline{BE}$이고, (면 ABFE)$\perp\overline{EH}$이므로

$\overline{AF}\perp\overline{EH}$

따라서 $\overline{AF}\perp$(면 BEH)이므로

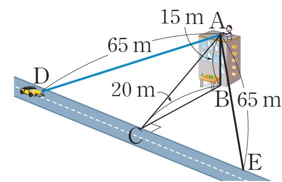
$\overline{AF}\perp\overline{BH}$ …… ②

①, ②에서 $\overline{BH}\perp$(면 AFC)

3

목표| 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 다음 그림에서 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{BC}\perp\overline{DE}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC}\perp\overline{DE}$



$\overline{AC}=\sqrt{20^2+15^2}=25(\text{m})$이므로

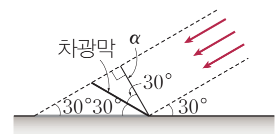
$\overline{CD}=\sqrt{65^2-25^2}=60(\text{m})$

따라서 리모컨으로 모형 자동차를 조종할 수 있는 도로의 총 길이는 $\overline{DE}=\overline{CD}+\overline{CE}=2\overline{CD}=\mathbf{120(m)}$

4

목표| 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 차광막의 평면 α 위로의 정사영은 그림자의 평면 α 위로의 정사영과 같다.



이때 차광막의 넓이를 S, 정사영의 넓이를 S'이라고 하면 $S'=S\cos 30^\circ$ …… ①

또 그림자의 넓이가 12이므로 $S'=12\cos 60^\circ$ …… ②

①, ②에서 $S=\mathbf{4\sqrt{3}}$

2 공간좌표

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
② 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
④ 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 공간에서의 점의 좌표	공간에서 점의 위치
	좌표공간에서 두 점 사이의 거리
02 선분의 내분점과 외분점	좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점
03 구의 방정식	좌표공간에서 구의 방정식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 150 쪽

2 공간좌표

인공위성

인공위성은 지구와 같은 행성의 둘레를 돌 수 있도록 로켓을 이용해 쏘아 올린 인공 장치로 사용하는 목적에 따라 상대편의 정보를 몰래 볼 수 있는 첩보 위성, 날씨를 알려주는 기상 위성, 다른 나라의 방송을 볼 수 있게 하는 통신 위성, 위치를 알려주는 항행 위성(GPS 위성), 우주를 관측하기 위한 천문 위성 등으로 분류된다.

인공위성이 움직이는 일정한 경로를 위성 궤도라고 하는데 위성 궤도에는 원형 궤도와 타원형 궤도가 있으며 보통 타원형 궤도를 따른다. 궤도 높이에 따라서 분류하기도 하는데 그 높이가 해발 250 km 정도의 대기 바로 위를 도는 궤도부터 해발 32200 km 이상인 궤도까지 있다. 궤도가 크면 클수록 위성이 궤도를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간, 즉 궤도 주기가 길어진다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 160 쪽

지구 중심의 좌표를 구할 수 있을까?

들어가면서 사람들은 평면 지도를 이용하여 이동하는 경로나 원하는 곳의 위치를 찾았으나 지도만으로 정확한 경로의 길이나 원하는 장소의 정확한 높이와 같은 자세한 정보는 얻기 힘들었다. 인류가 인공위성을 쏘아 올린 후 지구의 본래의 모습을 확인할 수 있었고, 위성 사진을 이용하면 위도와 경도로만 표시되는 위치를 고도까지 나타냄으로써 공간상의 위치나 이동 경로의 길이도 정확하게 알 수 있게 되었다.
GPS 수신기는 위성으로부터 수신받은 신호를 처리하여 수신기의 위치와 속도, 시간을 계산하는데, 이때 최소한 4개 이상의 위성이 필요하다.
이 단원에서는 좌표공간을 이용하여 공간에서 위치를 표현하는 방법과 지구의 모습과 같은 구를 방정식으로 표현하는 방법에 대해서 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	상	좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구하는 방법을 설명할 수 있다.
	중	좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	하	좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다.
2. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.	상	좌표공간에서 내분점, 외분점의 좌표를 구하는 방법을 이해하고, 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	중	좌표공간에서 양 끝 점의 좌표가 주어진 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	하	좌표공간에서 선분의 내분과 외분의 뜻을 말할 수 있다.
3. 구의 방정식을 구할 수 있다.	상	구의 방정식을 구할 수 있다.
	중	중심의 좌표와 반지름의 길이가 주어진 구의 방정식을 구할 수 있다.
	하	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 꼴의 구의 방정식에서 중심, 반지름의 길이를 구할 수 있다.

교과서 151 쪽

01 공간에서의 점의 좌표

● 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다.
● 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

공간에서 점의 위치를 어떻게 나타내는가?

생각 열기



탐구 활동

오른쪽 그림은 어느 야구장의 입장권이다. 이 야구장의 2구역 7열 21번의 좌석을 (2, 7, 21)로 나타내었다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 3구역 5열 17번의 좌석을 위의 방법으로 나타내어 보자.
2. (1, 6, 47)로 나타낸 것은 어떤 좌석을 나타내는가?

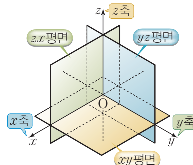
직선 위의 점의 위치는 하나의 실수로 나타낼 수 있고, 평면 위의 점의 위치는 두 실수의 순서쌍인 평면좌표로 나타낼 수 있다.

이제 공간 위의 점의 위치를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

❶ 오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때, 점 O를 원점, 각각의 수직선을 x축, y축, z축이라 하고, 이들을 통틀어 좌표축이라고 한다. 또

x축과 y축으로 결정되는 평면을 xy평면,
y축과 z축으로 결정되는 평면을 yz평면,
z축과 x축으로 결정되는 평면을 zx평면

이라 하고, 이들을 통틀어 좌표평면이라고 한다.



이와 같이 좌표축과 좌표평면이 정해진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

01 공간에서의 점의 좌표

소단원 지도 목표

① 좌표공간에 관련된 용어의 뜻을 알게 한다.
② 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 평면좌표의 개념을 공간으로 확장하여 공간좌표를 나타낼 수 있게 한다.

2. xy, yz, zx평면 등 새롭게 도입되는 용어 및 기호를 바르게 인식하고 사용할 수 있게 한다.

3. 공간에서의 점의 위치는 직육면체를 그려서 나타내는 것이 효율적임을 알게 한다.

4. 좌표공간의 점 또는 직선에 대한 대칭이동은 좌표평면의 내용과 비교하여 이해하게 한다.

5. 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리는 좌표평면에서의 두 점 사이의 거리를 확장한 것임을 이해하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 좌표공간(座標空間, coordinate space)
• 공간좌표(空間座標, coordinates in space)
• P(a, b, c)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 야구장 입장권에 표시된 좌석 표기 방법을 참고하여 공간에서의 정확한 위치를 표현하는 방법을 생각해 보게 하려는 것이다.

1. (3, 5, 17)

2. 1구역 6열 47번의 좌석

본문 해설

❶ 직선 위의 점의 위치는 그 직선을 수직선으로 잡고 그 점에 대응하는 실수로 나타낼 수 있고, 평면 위의 점의 위치는 한 점 O에서 직교하는 두 수직선을 x축, y축으로 이용하여 두 실수의 순서쌍 (x, y)로 나타낼 수 있다.

또 이를 확장하여 공간에서의 점의 위치도 한 점 O에서 직교하는 세 수직선을 이용하여 나타낼 수 있는데, 이때 세 수직선을 각각 x축, y축, z축이라고 한다.

공간에 있는 임의의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 각각 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점을 차례로 A, B, C라고 하자.

이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 정해진다.

역으로 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 주어지면 공간의 한 점 P가 정해진다.

따라서 공간의 한 점 P와 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)는 일대일 대응이 된다.

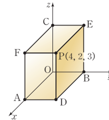
이 실수의 순서쌍 (a, b, c)를 점 P의 **공간좌표** 또는 좌표라 하고, a, b, c를 차례로 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라고 한다.

점 P의 좌표가 (a, b, c)일 때, 이것을 기호로

$$\mathbf{P(a, b, c)}$$

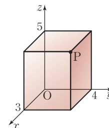
와 같이 나타낸다.

보기 오른쪽 그림의 직육면체에서 점 P의 좌표가 $(4, 2, 3)$일 때, 점 P에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라고 하면 A$(4, 0, 0)$, B$(0, 2, 0)$, C$(0, 0, 3)$
또 점 P에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하면 D$(4, 2, 0)$, E$(0, 2, 3)$, F$(4, 0, 3)$



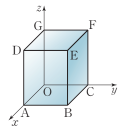
문제 1 점 P$(2, 5, 4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.
(1) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발
(2) 점 P에서 zx평면에 내린 수선의 발

발전 **문제 2** 점 P$(3, 4, 5)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.
(1) 점 P의 zx평면에 대하여 대칭인 점
(2) 점 P의 y축에 대하여 대칭인 점
(3) 점 P의 원점에 대하여 대칭인 점



좌표공간에서 두 점 사이의 거리는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 점 E의 좌표가 $(3, 4, 5)$일 때, 다음 물음에 답하여 보자.
1. $\overline{OB}$의 길이를 구하여 보자.
2. 1의 결과를 이용하여 $\overline{OE}$의 길이를 구하여 보자.



좌표공간에서 두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) 사이의 거리를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 대각선으로 하고 각 면이 좌표평면과 평행한 직육면체를 생각하면 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)+\overline{BD}^2$$

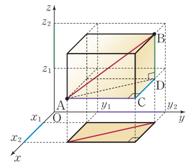
이다. 이때

$$\overline{CD}=|x_2-x_1|,\ \overline{AC}=|y_2-y_1|,\ \overline{BD}=|z_2-z_1|$$

이므로 좌표공간의 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

이다.



수학 I 수직선 위의 두 점 A(x_1), B(x_2) 사이의 거리는 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$
좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1^2)}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리
두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

특히 원점 O와 점 A(x_1, y_1, z_1) 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

보기 두 점 A$(1, 2, 3)$, B$(-2, 1, 1)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{14}$$

원점 O와 점 P$(1, 2, 2)$ 사이의 거리는

$$\overline{OP}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$$

1

목표| 공간좌표를 이해하고, 공간에서의 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{(2,\ 0,\ 0)}$
(2) $\mathbf{(2,\ 0,\ 4)}$

2

목표| 공간좌표를 이해하고, 공간에서의 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 점 P의 zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 점 P의 y좌표의 부호가 반대가 되므로 $\mathbf{(3,\ -4,\ 5)}$
(2) 점 P의 y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 점 P의 x좌표와 z좌표의 부호가 반대가 되므로 $\mathbf{(-3,\ 4,\ -5)}$
(3) 점 P의 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 점 P의 모든 좌표의 부호가 반대가 되므로 $\mathbf{(-3,\ -4,\ -5)}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 피타고라스 정리를 이용하여 직육면체의 대각선을 구하는 과정과 연결시켜 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구하는 방법을 생각해 보게 하려는 것이다.

1. $\overline{OB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\mathbf{5}$

2. $\overline{OB}=5$이므로 $\overline{OE}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{5^2+5^2}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

3

목표| 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이|
(1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-4)^2+(4-4)^2+\{0-(-2)\}^2}=\mathbf{\sqrt{5}}$
(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-2-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{49}=\mathbf{7}$
(3) $\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{36}=\mathbf{6}$
(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-b-a)^2+\{2a-(-2b)\}^2+\{2b-(-2a)\}^2}$
$=\sqrt{(a+b)^2+4(a+b)^2+4(a+b)^2}$
$=\sqrt{9(a+b)^2}=\mathbf{3|a+b|}$

문제 3 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) A$(4,\ 4,\ -2)$, B$(3,\ 4,\ 0)$ (2) A$(2,\ 1,\ 4)$, B$(-4,\ -2,\ 2)$

(3) O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(2,\ -4,\ 4)$ (4) A$(a,\ -2b,\ -2a)$, B$(-b,\ 2a,\ 2b)$

예제 01 두 점 A$(3,\ 1,\ -2)$, B$(1,\ 0,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x-3)^2+(0-1)^2+\{0-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{x^2-6x+14}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(x-1)^2+(0-0)^2+(0-5)^2}$

$=\sqrt{x^2-2x+26}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$

$x^2-6x+14=x^2-2x+26$

따라서 $x=-3$이므로 구하는 점 P의 좌표는 $(-3,\ 0,\ 0)$이다.

답 P$(-3,\ 0,\ 0)$

문제 4 다음 점의 좌표를 구하여라.

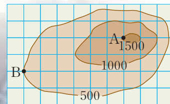
(1) 두 점 A$(1,\ 1,\ -2)$, B$(2,\ 4,\ 0)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P

(2) 세 점 A$(1,\ 1,\ -2)$, B$(2,\ 4,\ 0)$, C$(1,\ 0,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 Q

문제 5 두 점 A$(2,\ 2,\ 4)$, B$(-2,\ 4,\ 6)$과 yz평면 위의 점 C를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 C의 좌표를 모두 구하여라.

실생활

문제 6 오른쪽 그림과 같이 지도에 표시된 두 지점 A, B 사이의 실제 직선 거리를 구하여라. (단, 눈금은 같은 간격으로 그려져 있으며 눈금 한 칸의 실제 거리는 500 m이다.)



4

목표 | 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 점 P의 좌표를 $(0,\ y,\ 0)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$

$(0-1)^2+(y-1)^2+\{0-(-2)\}^2=(0-2)^2+(y-4)^2$

에서 $y=\dfrac{7}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathbf{P\left(0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)}$이다.

(2) 점 Q의 좌표를 $(x,\ y,\ 0)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{CQ}}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2=\overline{\mathrm{CQ}}^2$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$이므로

$(x-1)^2+(y-1)^2+\{0-(-2)\}^2=(x-2)^2+(y-4)^2$

에서 $x+3y=7$ ……①

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{CQ}}^2$이므로

$(x-1)^2+(y-1)^2+\{0-(-2)\}^2$

$=(x-1)^2+y^2+(0-1)^2$

에서 $y=2$

따라서 $y=2$를 ①에 대입하면 $x=1$이므로 점 Q의 좌표는 $\mathbf{Q(1,\ 2,\ 0)}$이다.

5

목표 | 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 점 C의 좌표를 $(0,\ y,\ z)$라고 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$24=4+(y-4)^2+(z-6)^2$에서

$y^2+z^2-8y-12z+32=0$ ……①

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$이므로

$24=4+(y-2)^2+(z-4)^2$에서

$y^2+z^2-4y-8z=0$ ……②

①$-$②를 하면

$-4y-4z+32=0,\ z=8-y$ ……③

③을 ②에 대입하여 정리하면

$2y^2-12y=0,\ 2y(y-6)=0$에서

$y=0$ 또는 $y=6$

$y=0$이면 $z=8$, $y=6$이면 $z=2$

따라서 점 C의 좌표는 $\mathbf{C(0,\ 0,\ 8)}$ 또는 $\mathbf{C(0,\ 6,\ 2)}$이다.

6

목표 | 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 지도의 왼쪽 아래 꼭짓점을 공간좌표의 원점으로 생각하면 두 지점 A, B의 좌표를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

A$(7,\ 4,\ 3)$, B$(1,\ 2,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1-7)^2+(2-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

따라서 두 지점 A, B 사이의 실제 직선 거리는

$2\sqrt{11}\times500=1000\sqrt{11}(\mathrm{m})=\mathbf{\sqrt{11}(km)}$

02 선분의 내분점과 외분점

소단원 지도 목표

① 좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
② 좌표공간에서 선분의 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 좌표공간에서의 선분의 내분점과 외분점은 좌표평면에서의 선분의 내분점과 외분점을 확장한 것임을 이해하게 한다.

2. 좌표공간의 선분을 좌표평면으로 정사영시킨 후 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 이용하게 한다.

3. 선분의 외분점은 선분의 연장선 위에 있음을 이해하게 한다.

교과서 155 쪽

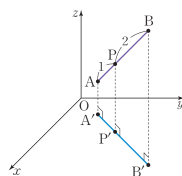
02 선분의 내분점과 외분점

● 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점은 어떻게 구하는가?

탐구 활동 두 점 A(1, 1, 1), B(4, 4, 4)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P라 하고 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 점 A′, B′, P′이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 점 A′, B′의 좌표를 각각 구하여 보자.
2. $\overline{A'P'}:\overline{P'B'}$을 구하여 보자.



● 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 위치



좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

이다.

이제 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 (x, y, z)를 구하여 보자.

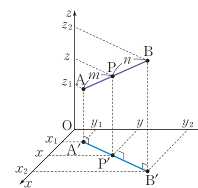
❶ 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라고 하면

$A'(x_1, y_1, 0)$, $B'(x_2, y_2, 0)$, $P'(x, y, 0)$

이다. 또

$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{A'P'}:\overline{P'B'}=m:n$

이므로 점 P′은 선분 A′B′을 $m:n$으로 내분하는 점이다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 좌표공간에서의 선분의 길이의 비와 그 정사영의 길이의 비가 같음을 알고, 좌표평면에서의 내분점과 외분점을 이용하여 좌표공간에서의 선분의 내분점과 외분점을 구하는 방법을 생각해 보게 하려는 것이다.

1. 두 점 A′, B′은 xy평면 위의 점이므로
A′(1, 1, 0), B′(4, 4, 0)

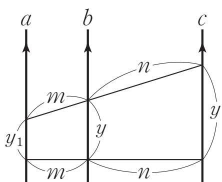
2. 좌표공간에서의 선분의 길이의 비와 그 정사영의 길이의 비가 같으므로
$\overline{A'P'}:\overline{P'B'}=\overline{AP}:\overline{PB}=$**1 : 2**

본문 해설

❶ 선분 AB와 내분점 P를 xy평면 위로 정사영시킬 때, 정사영인 선분 A′B′을 점 P′이 분할하는 비는 서로 같다. 이것은 평행선 사이에서 선분의 분할비가 일정하기 때문이다.

즉, 세 직선 a, b, c가 평행하면 분할비는 서로 같다. 여기서

$y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$이 성립한다.



❷ 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 (x, y, z)를 구하여 보자.

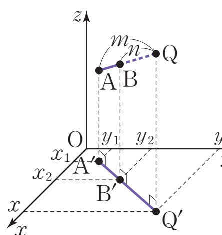
세 점 A, B, Q의 xy평면 위로의 정사영을 각각 $A'(x_1, y_1, 0)$, $B'(x_2, y_2, 0)$, $Q'(x, y, 0)$이다.

$\overline{AQ}:\overline{QB}=\overline{A'Q'}:\overline{Q'B'}=m:n$

이므로 점 Q′은 선분 A′B′을 $m:n$으로 외분하는 점이다. 이때 세 점 A′, B′, Q′은 xy평면 위에 있으므로

$x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

$y=\dfrac{my_2-ny_1}{m-n}$



교과서 156 쪽

이때 세 점 A′, B′, P′은 xy평면 위에 있으므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다.

마찬가지로 세 점 A, B, P의 yz평면 또는 zx평면 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

이다. 따라서 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

이다.

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $m=n$일 때이므로

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

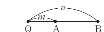
이다.

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 위치

① $m>n$일 때



② $m<n$일 때



❷ 이와 같은 방법으로 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하면 다음과 같다.

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

보기 두 점 $A(1,\ 3,\ -3)$, $B(-2,\ 6,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P와 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$P\left(\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1},\ \frac{2\times6+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}\right)$$

$$Q\left(\frac{2\times(-2)-1\times1}{2-1},\ \frac{2\times6-1\times3}{2-1},\ \frac{2\times3-1\times(-3)}{2-1}\right)$$

이므로 $P(-1,\ 5,\ 1)$, $Q(-5,\ 9,\ 9)$

교과서 157 쪽

문제 1 두 점 $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(4,\ 5,\ 6)$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표

(3) 선분 PQ의 중점 M의 좌표

발전 문제 2 평행사변형 ABCD에서 $A(3,\ 4,\ 1)$, $B(2,\ 5,\ -1)$이고 두 대각선의 교점의 좌표가 $(2,\ 3,\ 0)$일 때, 선분 BC의 길이를 구하여라.

예제 01 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$일 때, 무게중심 G의 좌표는

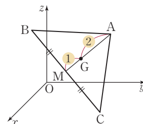
$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

임을 증명하여라.

삼각형의 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분한다.

증명 변 BC의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2},\ \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$



삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면 점 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+1\times x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+1\times y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$z=\frac{2\times\frac{z_2+z_3}{2}+1\times z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

문제 3 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 $A(2,\ -10,\ 4)$, $B(0,\ 4,\ -6)$이고 무게중심의 좌표가 $G(2,\ -4,\ 0)$일 때, 점 C의 좌표를 구하여라.

마찬가지로 점 A, B, Q의 yz평면 또는 zx평면 위로의 정사영을 이용하여 점 Q의 z좌표를 구하면

$$z=\frac{mz_2-nz_1}{m-n}$$

따라서 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

1

목표| 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P\left(\frac{1\times4+2\times1}{1+2},\ \frac{1\times5+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times6+2\times3}{1+2}\right)$

이므로 **$P(2,\ 3,\ 4)$**

(2) $Q\left(\frac{1\times4-2\times1}{1-2},\ \frac{1\times5-2\times2}{1-2},\ \frac{1\times6-2\times3}{1-2}\right)$

이므로 **$Q(-2,\ -1,\ 0)$**

(3) $M\left(\frac{2+(-2)}{2},\ \frac{3+(-1)}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$

이므로 **$M(0,\ 1,\ 2)$**

2

목표| 좌표공간에서의 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 $(2,\ 3,\ 0)$은 선분 AC의 중점이므로 점 C의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면

$\frac{3+a}{2}=2,\ \frac{4+b}{2}=3,\ \frac{1+c}{2}=0$에서

$a=1,\ b=2,\ c=-1$

따라서 점 C의 좌표는 $C(1,\ 2,\ -1)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(1-2)^2+(2-5)^2+\{-1-(-1)\}^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

3

목표| 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 C의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면

$\frac{2+0+a}{3}=2,\ \frac{-10+4+b}{3}=-4,\ \frac{4+(-6)+c}{3}=0$

에서 $a=4,\ b=-6,\ c=2$

따라서 점 C의 좌표는 **$C(4,\ -6,\ 2)$**이다.

03 구의 방정식

소단원 지도 목표

① 구의 뜻을 알고, 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 구의 방정식에서 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 좌표공간에서의 구의 방정식은 좌표평면에서의 원의 방정식을 확장한 것임을 이해하게 한다.

2. 같은 평면 위에 있지 않은 네 점은 하나의 구를 결정함을 이해하고, 이를 구체적인 문제로 확인할 수 있게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 구 모양의 공에서 공의 중심을 좌표공간의 원점에 위치하였을 때 공 위의 점은 어떤 관계식을 만족하는지 생각해 보게 함으로써 구의 방정식을 이해하게 하려는 것이다.

교과서 158 쪽

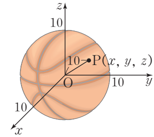
03 구의 방정식

● 구의 방정식을 구할 수 있다.

좌표공간에서 구의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 좌표공간에 반지름의 길이가 10인 구 모양의 공을 중심이 원점 O와 일치하도록 놓고, 공 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 이 공을 xy평면으로 자르면 단면은 어떤 도형이 되는가?

2. 선분 OP의 길이를 x, y, z로 나타내어 보자.

공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합을 구라고 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라고 한다.

좌표공간에서 중심이 점 $C(a, b, c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식을 구하여 보자.

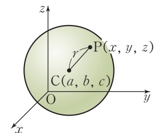
구 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$라고 하면 $\overline{CP}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

이다.



역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $P(x, y, z)$는 $\overline{CP}=r$이므로 점 P는 중심이 점 $C(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 r인 구 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 구하는 구의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **구의 방정식**

중심이 $C(a, b, c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

1. 원

2. 선분 OP의 길이는 원점 $O(0, 0, 0)$과 점 $P(x, y, z)$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

본문 해설

❶ 다음과 같이 경우에 따라 구의 방정식을 구할 수 있다.

(1) 중심 (a, b, c) 또는 반지름의 길이 r가 주어진 경우

➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

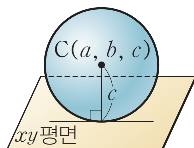
(2) 좌표평면에 접하는 경우

① xy평면에 접하는 경우

$r=|\text{중심의 } z\text{좌표}|=|c|$

이므로

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$
$=c^2$

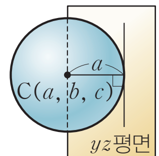


② yz평면에 접하는 경우

$r=|\text{중심의 } x\text{좌표}|=|a|$

이므로

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$
$=a^2$

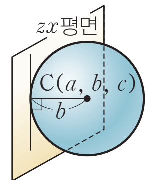


③ zx평면에 접하는 경우

$r=|\text{중심의 } y\text{좌표}|=|b|$

이므로

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$
$=b^2$



(3) 지름의 양 끝 점 A, B의 좌표가 주어진 경우

(구의 중심)$=(\overline{AB}$의 중점$)=(a, b, c)$,

(반지름의 길이)$=\frac{1}{2}\overline{AB}=r$

➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

보기 중심이 C(3, 2, −4)이고, 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은
$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$
중심이 원점이고, 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은
$x^2+y^2+z^2=16$

문제 1 다음 구의 방정식을 구하여라.
(1) 중심이 C(1, −2, 0)이고, 반지름의 길이가 2인 구
(2) 중심이 C(1, 2, 3)이고, 원점을 지나는 구
(3) 두 점 A(2, 3, 5), B(6, 5, 3)을 지름의 양 끝 점으로 하는 구
(4) 중심이 C(5, 1, 2)이고, xy평면에 접하는 구

구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$을 전개하여 정리하면
$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$
이다. 여기서 $-2a=A$, $-2b=B$, $-2c=C$, $a^2+b^2+c^2-r^2=D$로 놓으면
$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \quad \cdots\cdots ①$$
의 꼴이 된다.

역으로 x, y, z에 대한 이차방정식 ①을 완전제곱의 꼴로 변형하면
$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$
이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 방정식 ①은 중심이 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

$A^2+B^2+C^2-4D=0$이면 방정식 ①은 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$를 나타낸다. 또 $A^2+B^2+C^2-4D<0$이면 방정식 ①을 만족시키는 실수 x, y, z는 존재하지 않는다.

예제 01 방정식 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

풀이 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0$을 변형하면 $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3^2$
따라서 주어진 방정식은 중심이 (−3, 1, 2)이고 반지름의 길이가 3인 구를 나타낸다.

답 중심이 (−3, 1, 2)이고 반지름의 길이가 3인 구

문제 2 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

1

목표| 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

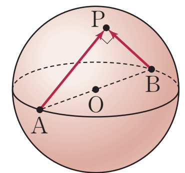
풀이| (1) 중심이 C(1, −2, 0)이고, 반지름의 길이가 2인 구의 방정식은
$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4}$$
(2) 중심이 C(1, 2, 3)이고, 원점을 지나므로 이 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$
따라서 구하는 구의 방정식은
$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14}$$
(3) 선분 AB의 중점이 구의 중심이므로 구의 중심의 좌표는 (4, 4, 4)이다.
또 구의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이므로
$$\frac{1}{2}\sqrt{(6-2)^2+(5-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{6}$$
따라서 구하는 구의 방정식은
$$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6}$$
(4) 구하는 구의 반지름의 길이를 r라고 하면 구의 방정식은
$$(x-5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=r^2$$
으로 놓을 수 있다.
이때 이 구가 xy평면에 접하므로 이 구의 반지름의 길이는 2이다.
따라서 구하는 구의 방정식은
$$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4}$$

2

목표| 주어진 방정식을 변형하여 어떤 도형을 나타내는지 말할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$을 변형하면
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4^2$$
따라서 주어진 방정식은 **중심이 (1, −2, 3)이고 반지름의 길이가 4인 구를 나타낸다.**

지/도/자/료



구의 지름의 양 끝 점의 좌표가 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$일 때, 구의 방정식은 구면 위의 임의의 점 $P(x, y, z)$에 대하여 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}=0$이다.
그런데
$\overrightarrow{AP}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$,
$\overrightarrow{BP}=(x-x_2, y-y_2, z-z_2)$
이므로 구의 방정식은 다음과 같다.
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$
이것은 원의 지름의 양 끝 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$의 좌표가 주어질 때의 원의 방정식
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$
을 확장한 것임을 알 수 있다.

교과서 160 쪽

① 예제 02 네 점 O(0, 0, 0), P(1, 0, −1), Q(−1, 2, 1), R(1, 3, 0)을 지나는 구의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라고 하면
네 점 O, P, Q, R가 이 구를 지나므로 각 점의 좌표를 대입하여 정리하면

$$A=2,\ B=-4,\ C=4,\ D=0$$

따라서 구하는 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z=0$

답 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z=0$

문제 3 네 점 O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0), R(0, 0, 3)을 지나는 구의 방정식을 구하여라.

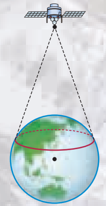
발전 문제 4 구 $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-4z+5=0$이 xy평면에 접할 때, 양수 a의 값을 구하여라.

창의 up 두 점 A(−1, 0, 0), B(3, 0, 0)에서 거리의 제곱의 합이 10으로 일정한 점 P(x, y, z)가 그리는 도형이 무엇인지 말하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

지구가 반지름의 길이가 6400 km인 완전한 구의 모양이고, 인공위성에서 지표면에 보내는 전파가 직선으로 전송된다고 할 때, 이 인공위성에서 전파가 도달하는 최대 지점들로 이루어진 도형은 원이다. 이 원은 지구가 xy평면과 만나서 생기는 원과 같고, 원의 둘레의 길이가 $6400\sqrt{3}\pi$, 원의 중심의 좌표가 (1280, 1400, 0)일 때, 지구의 중심의 좌표를 구하여라. (단, 지구의 중심의 z좌표는 음수이다.)



본문 해설

❶ 한 개의 원을 결정하기 위해서는 세 개의 점이 필요하고, 한 개의 구를 결정하기 위해서는 네 개의 점이 필요하다.
네 개의 점이 주어지면 구의 방정식을 일반형으로 놓고 푼다. 즉, 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$에 네 개의 점을 대입한 후 연립방정식을 풀어 A, B, C, D의 값을 구한다.

3

목표| 네 점을 지나는 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라고 하면 주어진 점의 좌표를 대입하여 정리하면
$A=-1$, $B=-2$, $C=-3$, $D=0$
따라서 구하는 구의 방정식은
$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0}$

4

목표| 좌표평면과 구의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-4z+5=0$에서
$(x-a)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=a^2$
따라서 이 구는 중심의 좌표가 $(a,\ -1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 a이다.
이 구가 xy평면에 접하려면
$a=\mathbf{2}$

창의 UP

출제 의도| 공간에서 두 정점에서 거리의 제곱의 합이 일정한 점의 집합이 구가 됨을 방정식을 통해 확인할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=10$이므로
$x^2+y^2+z^2-2x=0$, $(x-1)^2+y^2+z^2=1$
따라서 점 P가 그리는 도형은 **중심이 (1, 0, 0)이고 반지름의 길이가 1인 구**이다.

단원 과제

목표| 원의 방정식과 구의 방정식의 관계를 이용하여 구의 중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 반지름의 길이가 6400이고 중심이 $(a,\ b,\ c)$인 구의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=6400^2$
이 구가 xy평면과 만나서 생기는 원은 $z=0$일 때이므로
$(x-a)^2+(y-b)^2=6400^2-c^2$
이 방정식이 주어진 원의 방정식과 일치하여야 한다.
지구가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은
$(x-1280)^2+(y-1400)^2=(3200\sqrt{3})^2$
즉, $a=1280$, $b=1400$, $c=|3200|$
따라서 구하는 지구의 중심의 좌표는
(1280, 1400, −3200)

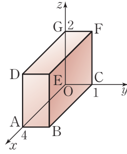
교과서 161 쪽

중단원 기초

[해답 p.217]

수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 각 꼭짓점의 좌표를 구하여라.



01 공간에서의 점의 좌표

2 두 점 A(1, 1, 3), B(2, 3, 4)에서 같은 거리에 있는 z축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

01 공간에서의 점의 좌표 두 점 사이의 거리

3 두 점 P(−1, −2, 6), Q(2, 2, 6)이 점 R(a, b, c)에 대하여 대칭일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

02 선분의 내분점과 외분점 선분의 중점

4 세 점 A(2, 3, 1), B(−2, 3, 1), C(5, 0, 2)에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AC를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표

(3) 선분 PQ의 중점 M의 좌표

02 선분의 내분점과 외분점

5 다음 방정식이 나타내는 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여라.

(1) $x^2+y^2+z^2-2y+4z-4=0$

(2) $x^2+y^2+z^2+6x-4y+9=0$

03 구의 방정식

중/단/원 기초

1

목표| 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| **O(0, 0, 0), A(4, 0, 0), B(4, 1, 0), C(0, 1, 0), D(4, 0, 2), E(4, 1, 2), F(0, 1, 2), G(0, 0, 2)**

2

목표| 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 P(0, 0, z)라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$(0-1)^2+(0-1)^2+(z-3)^2$

$=(0-2)^2+(0-3)^2+(z-4)^2$

에서 $z=9$

따라서 점 P의 좌표는 **P(0, 0, 9)**이다.

3

목표| 좌표공간에서 선분의 중점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 R(a, b, c)는 두 점 P(−1, −2, 6), Q(2, 2, 6)의 중점이므로

$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2}, 0, 6\right)$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=6$이므로

$a+b+c=\mathbf{\frac{13}{2}}$

4

목표| 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\frac{3\times(-2)+1\times2}{3+1}, \frac{3\times3+1\times3}{3+1}, \frac{3\times1+1\times1}{3+1}\right)$

이므로 **P(−1, 3, 1)**

(2) 선분 AC를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}\left(\frac{3\times5-2\times2}{3-2}, \frac{3\times0-2\times3}{3-2}, \frac{3\times2-2\times1}{3-2}\right)$

이므로 **Q(11, −6, 4)**

(3) 선분 PQ의 중점 M의 좌표는

$\mathrm{M}\left(\frac{-1+11}{2}, \frac{3+(-6)}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$

이므로 $\mathbf{M\left(5, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}$

5

목표| 주어진 방정식을 변형하여 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 방정식 $x^2+y^2+z^2-2y+4z-4=0$을 변형하면

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$

따라서 주어진 방정식은 **중심이 (0, 1, −2)이고 반지름의 길이가 3인 구**이다.

(2) 방정식 $x^2+y^2+z^2+6x-4y+9=0$을 변형하면

$(x+3)^2+(y-2)+z^2=4$

따라서 주어진 방정식은 **중심이 (−3, 2, 0)이고 반지름의 길이가 2인 구**이다.

중/단/원 기본

교과서 162 쪽

중단원 기본

[해답 p.217]

수준별 학습

1 두 점 A$(-2,\ 3,\ 0)$, B$(3,\ 0,\ 0)$에 대하여 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$을 만족시키면서 움직이는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하여라.

01 공간에서의 점의 좌표 - 두 점 사이의 거리

2 점 A$(2,\ 3,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라고 할 때, 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점 R의 좌표를 구하여라.

02 선분의 내분점과 외분점

3 네 점 A$(3,\ 2,\ 1)$, B$(4,\ 6,\ 10)$, C$(a,\ 3,\ 5)$, D$(7,\ b,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD가 정사면체라고 할 때, 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표를 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)

02 선분의 내분점과 외분점 - 삼각형의 무게중심

4 점 A$(2,\ 2,\ 4)$를 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구는 2개이다. 이때 두 구의 반지름의 길이의 합을 구하여라.

03 구의 방정식

5 점 $(-2,\ 3,\ 7)$에서 구 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-4=0$에 그은 접선의 길이를 구하여라.

03 구의 방정식

1

목표 | 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 점 P의 좌표를 P$(x,\ y,\ z)$라고 하면

$\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

$(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=4\{(x-3)^2+y^2+z^2\}$

따라서 $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-\frac{28}{3}x+2y+\frac{23}{3}=0}$

2

목표 | 좌표공간에서 선분의 외분점을 구할 수 있게 한다.

풀이 | P$(2,\ -3,\ -4)$, Q$(-2,\ 3,\ 4)$이므로 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점 R의 좌표는 **R$(-6,\ 9,\ 12)$**이다.

3

목표 | 좌표공간에서 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 정사면체 ABCD의 모든 모서리의 길이는 $7\sqrt{2}$이다.

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$에서 $98=(a-3)^2+(3-2)^2+(5-1)^2$

$(a-3)^2=81,\ a-3=\pm9$

$a>0$이므로 $a=12$

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$에서 $98=(7-3)^2+(b-2)^2+(2-1)^2$

$(b-2)^2=81,\ b-2=\pm9$

$b>0$이므로 $b=11$

B$(4,\ 6,\ 10)$, C$(12,\ 3,\ 5)$, D$(7,\ 11,\ 2)$이므로 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표는 $\boldsymbol{\left(\frac{23}{3},\ \frac{20}{3},\ \frac{17}{3}\right)}$이다.

4

목표 | xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구의 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이 | xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$(x\pm r)^2+(y\pm r)^2+(z\pm r)^2=r^2$으로 놓을 수 있다.

이 중 점 A$(2,\ 2,\ 4)$를 지나는 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

이 방정식이 점 A$(2,\ 2,\ 4)$를 지나므로

$(2-r)^2+(2-r)^2+(4-r)^2=r^2$

$r^2-8r+12=0,\ (r-2)(r-6)=0$

따라서 두 구의 반지름은 각각 2 또는 6이므로 두 구의 반지름의 길이의 합은 **8**이다.

5

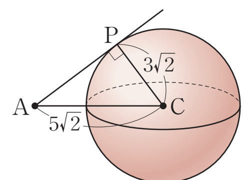
목표 | 구의 접선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-4=0$을 변형하면 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=18$

이때 구의 중심을 C라고 하면 C$(1,\ -2,\ 3)$이므로

$\overline{AC}=5\sqrt{2}$이고

따라서 점 A$(-2,\ 3,\ 7)$에서 구에 그은 접선의 접점을 P라고 하면 구하는 접선의 길이는



$\overline{AP}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(3\sqrt{2})^2}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$

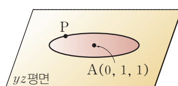
중단원 실력

[해답 p.218]

수준별 학습

1 중심이 점 A(0, 1, 1)이고, 반지름의 길이가 1인 원이 yz평면 위에 있다. 이 원 위의 점P와 점 Q(2, 4, −3) 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

•Q(2, 4, −3)



01 공간에서의 점의 좌표 — 두 점 사이의 거리

2 좌표공간 위에 세 점 A(6, 2, 10), B(4, 2, 6), C(8, 8, 6)이 있다. zx평면 위의 점 P, xy평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$의 최솟값을 구하여라.

01 공간에서의 점의 좌표 — 두 점 사이의 거리

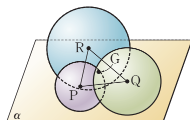
3 두 점 A(−2, 5, −4), B(a, b, c)에 대하여 선분 AB가 xy평면에 의하여 1 : 2로 내분되고, z축에 의하여 3 : 2로 외분된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

02 선분의 내분점과 외분점

4 구 $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-2bz+5=0$이 xy평면과 yz평면에 동시에 접하도록 두 양수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

03 구의 방정식

5 반지름의 길이가 각각 6, 8, 10이고 서로 외접하는 세 구가 평면 α 위에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 P, Q, R라고 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심 G와 평면 α 사이의 거리를 구하여라.



03 구의 방정식

중/단/원 실력

1

목표| 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 Q(2, 4, −3)에서 yz평면에 내린 수선의 발을 Q′이라고 하면 Q′(0, 4, −3)

$\overline{AQ'}=5$이고 $\overline{AQ'}-1\le\overline{PQ'}\le\overline{AQ'}+1$이므로 $4\le\overline{PQ'}\le6$

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{QQ'}^2+\overline{PQ'}^2}$이므로 구하는 최솟값은

$\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

2

목표| 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 A의 zx평면에 대한 대칭점을 A′이라고 하면 A′(6, −2, 10)

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\ge\overline{A'B}$ …… ①

또 점 C의 xy평면에 대한 대칭점을 C′이라 고 하면 C′(8, 8, −6)

이때 $\overline{QC}=\overline{QC'}$이므로

$\overline{BQ}+\overline{QC}=\overline{BQ}+\overline{QC'}\ge\overline{BC'}$ …… ②

①, ②에서 $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}\ge\overline{A'B}+\overline{BC'}$

$\overline{A'B}+\overline{BC'}=20$이므로 구하는 최솟값은 **20**

3

목표| 좌표공간에서의 선분의 내분점과 외분점을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{a-4}{3}, \frac{b+10}{3}, \frac{c-8}{3}\right)$

이 점은 xy평면 위의 점이므로 $c=8$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$(3a+4, 3b-10, 3c+8)$

이 점은 z축 위의 점이므로 $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{10}{3}$

따라서 $a+b+c=\mathbf{10}$

4

목표| 좌표공간에서 xy평면과 yz평면에 동시에 접하는 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $(x-a)^2+(y+1)^2+(z-b)^2$
$=a^2+b^2-4$

이므로 주어진 구는 중심의 좌표가 $(a, -1, b)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+b^2-4}$이다.

이 구가 xy평면에 접하려면 $b^2=a^2+b^2-4$

또 yz평면에 접하려면 $a^2=a^2+b^2-4$

$a>0$, $b>0$이므로 $a=2$, $b=2$에서 $a+b=\mathbf{4}$

5

목표| 좌표공간에서 구의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 평면 α를 xy평면으로 놓고 생각하면 세 구는 모두 xy평면에 접하므로 세 구의 중심을 각각 P$(a_1, b_1, 6)$, Q$(a_2, b_2, 8)$, R$(a_3, b_3, 10)$으로 놓을 수 있다.

세 구가 서로 외접하고 모두 xy평면에 접하므로 △PQR의 무게중심에서 xy평면까지의 거리는 △PQR의 무게중심의 z좌표와 같다.

따라서 삼각형 PQR의 무게중심 G와 평면 α 사이의 거리는 $\frac{6+8+10}{3}=\mathbf{8}$

3 공간벡터

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있게 한다.
② 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
④ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 공간벡터의 뜻과 그 연산	공간벡터의 뜻
	공간벡터의 연산
02 공간벡터의 성분과 내적	공간에서의 위치벡터
	공간벡터의 성분
	공간벡터의 내적
	두 공간벡터가 이루는 각의 크기
03 직선의 방정식	좌표공간에서 벡터를 이용한 직선의 방정식
	좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기
04 평면과 구의 방정식	좌표공간에서 벡터를 이용한 평면의 방정식
	좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기
	좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리
	좌표공간에서 벡터를 이용한 구의 방정식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

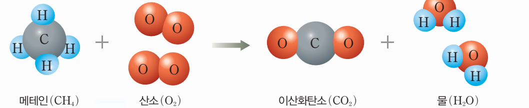
들어가면서 3차원 공간에서 일어나는 여러 가지 현상도 평면에서와 마찬가지로 벡터를 이용하여 나타낼 수 있다.
이 단원에서는 공간에서의 벡터를 정의하고 공간벡터의 크기와 연산을 다룬다. 또 평면벡터에서와 마찬가지로 성분과 내적에 대하여 학습하며 이를 이용하여 공간에서 직선, 평면, 구의 방정식을 구하고, 다양한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교과서 164 쪽

3 공간벡터

메테인 분자와 벡터의 내적

메테인(methane)은 지방족 탄화수소 화합물 중 가장 간단한 알케인 화합물로 무색무취의 가연성 기체이며 도시가스(액화 천연가스, LNG)의 주성분이다. 분자식이 CH_4인 메테인 분자의 구조는 탄소 원자(C)가 정사면체의 중심에 있고 각 꼭짓점에 4개의 수소 원자(H)가 각각 1개씩 있는 구조이다. 메테인은 연소 반응과 치환 반응을 통해 수소 원자를 다른 작용기로 치환시켜 다양한 화합물을 만드는데, 메테인 분자는 산소 분자(O_2)와 연소 반응 후 이산화탄소와 물을 생성한다.



단원 과제
이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 177쪽
메테인 분자 구조를 좌표공간에 나타내었을 때, 벡터의 내적을 이용하여 탄소와 수소 원자의 좌표를 구할 수 있을까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.	상	공간벡터의 뜻을 알고, 주어진 벡터를 평행이동하여 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
	중	공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 연산에 대한 성질을 이용하여 주어진 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
	하	공간벡터의 뜻을 말할 수 있고, 그림으로 주어진 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
2. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	상	두 공간벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 문제 또는 벡터의 평행 · 수직 조건을 포함하는 문제를 해결할 수 있다.
	중	두 공간벡터의 내적의 뜻을 이해하고 두 공간벡터의 내적을 구할 수 있다.
	하	벡터의 크기와 각이 주어지거나 벡터의 성분이 주어진 경우 두 공간벡터의 내적을 구할 수 있다.

교과서 165 쪽

01 공간벡터의 뜻과 그 연산

● 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

공간벡터란 무엇인가?

생각 열기 신안 해저 유물

신안 해저 유물은 1976년 전라남도 신안군 증도면 앞바다에서 발굴 인양된 중국 송, 원 시대 유물을 말한다. 발굴 지역의 위치는 동경 126도 5분 6초, 북위 35도 1분 15초로 임자도와 증도의 중간 지점이다. 발굴 당시 해저면 아래에서 길이 약 20 m, 너비 6.9 m 정도의 목선이 매몰된 상태로 발견되었다.


청백자주전자

탐구 활동 신안 해저 유물은 신안 해저 유물 발굴 기념비에서 서북 방향으로 약 2500 m 떨어진 바다의 해수면 아래 약 20 m 지점에서 발굴되었다고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 기념비에서 인양선까지를 벡터로 나타내어 보자.
2. 인양선에서 해저 유물까지를 벡터로 나타내어 보자.
3. 기념비에서 해저 유물까지를 벡터로 나타내어 보자.

평면에서의 벡터와 마찬가지로 공간에서 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **공간벡터**라고 한다.

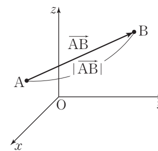
오른쪽 그림과 같이 공간에서 한 점 A를 시점으로 하고 한 점 B를 종점으로 하는 벡터를 평면벡터와 마찬가지로

$\overrightarrow{AB}$ 또는 $\vec{a}$

와 같이 나타낸다. 이때 선분 AB의 길이를 이 벡터의 크기라 하고, 기호로

$|\overrightarrow{AB}|$ 또는 $|\vec{a}|$

와 같이 나타낸다.



또한 크기가 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.

한편 벡터 $\overrightarrow{AA}$를 영벡터라 하고, 기호로 $\vec{0}$와 같이 나타낸다.

성취 기준		성취 수준
3. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.	상	좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 문제 또는 실생활 문제를 해결하며, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	방향벡터의 뜻을 알고, 좌표공간에서 직선이 지나는 한 점과 방향벡터가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.
4. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다.	상	좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 문제를 해결하며, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.
	하	법선벡터의 뜻을 알고, 평면 위의 한 점과 법선벡터가 주어진 구의 방정식을 구할 수 있다.

01 공간벡터의 뜻과 그 연산

소단원 지도 목표

① 공간벡터의 뜻을 알고, 공간벡터의 크기를 구할 수 있다.
② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있게 한다.
③ 두 공간벡터의 평행을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 공간벡터의 뜻과 성질은 평면벡터와 관련지어 이해하게 한다.

2. 추상적인 벡터공간에서는 영벡터 $\vec{0}$를 먼저 정의한 후 역벡터 $-\vec{a}$를 대수적으로 정의한다.

새로 나온 용어와 기호

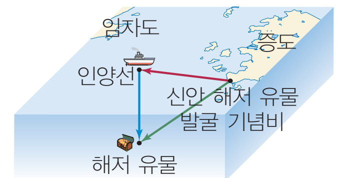
• 공간벡터(space vector)

생각 열기 참/고/자/료

'신안선(新安船)'의 발굴로 바닷길을 통한 대외교류와 수중고고학에 대해 관심이 높아졌고, 발굴된 유물은 당시 해상 실크로드를 통한 교역의 실상과 생활상을 구체적으로 이해할 수 있는 중요한 단서를 제공하고 있다. 국립중앙박물관과 국립해양문화재연구소의 홈페이지를 방문하면 신안 해저 유물과 관련된 다양한 정보를 얻을 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 지도 위의 두 지점을 벡터로 나타내 보고 공간에서의 벡터를 생각해 볼 수 있게 한다.



1. 기념비에서 인양선까지를 벡터로 나타내면 빨간색 선과 같다.

2. 인양선에서 해저 유물까지를 벡터로 나타내면 파란색 선과 같다.

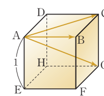
3. 기념비에서 해저 유물까지를 벡터로 나타내면 초록색 선과 같다.

교과서 166 쪽

보기 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서

$|\overrightarrow{AB}|=1,\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{AG}|=\sqrt{3}$

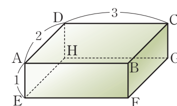
이고 $\overrightarrow{AB}$는 단위벡터이다.



문제 1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=3$, $\overline{AE}=1$인 직육면체에서 다음 벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{FC}$

(3) $\overrightarrow{EB}$ (4) $\overrightarrow{AG}$

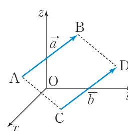


● 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향만으로 결정되므로 한 벡터를 평행이동한 것은 모두 같은 벡터이다.

❶ 오른쪽 그림과 같이 공간에서 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$의 크기와 방향이 같을 때 두 벡터는 서로 같다고 하며, 기호로 $\vec{a}=\vec{b}$ 또는 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$와 같이 나타낸다.

한편 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 기호로 $-\vec{a}$와 같이 나타낸다. 즉, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$라고 하면 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이다.

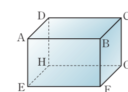
● $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$
$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$



보기 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ (2) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$

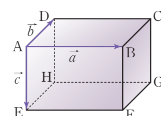
(3) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{HF}$ (4) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{CF}$



문제 2 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.

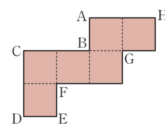
(1) $\overrightarrow{HG}$ (2) $\overrightarrow{EH}$

(3) $\overrightarrow{CG}$ (4) $\overrightarrow{CB}$



창의 up

오른쪽 그림은 정육면체의 전개도이다. 이 전개도를 접어서 만들 수 있는 정육면체를 그리고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터를 모두 찾아보아라.



1

목표| 공간벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{\mathbf{13}}$

(2) $|\overrightarrow{FC}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{\mathbf{5}}$

(3) $|\overrightarrow{EB}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{\mathbf{10}}$

(4) $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{\mathbf{14}}$

본문 해설

❶ 두 벡터가 같다는 것은 두 벡터의 시점과 종점이 다르더라도 크기와 방향이 같아서 평행이동하면 두 벡터가 일치한다는 뜻이다. 이와 같이 벡터는 위치에 관계없이 크기와 방향만으로 결정되므로 벡터를 방향이 주어진 선분을 이용하여 나타낼 때에는 그 시점을 편한대로 정하여도 된다.

2

목표| 서로 같은 벡터와 역벡터를 찾을 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\vec{b}}$

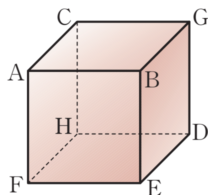
(3) $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{\vec{c}}$

(4) $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{-\vec{b}}$

창의 UP

출제 의도| 주어진 전개도로 정육면체를 만들어 서로 같은 벡터를 찾을 수 있게 한다.

풀이| 전개도를 접어 정육면체를 만들면 다음과 같다.



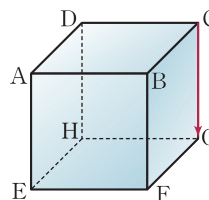
$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\overrightarrow{CG}}=\boldsymbol{\overrightarrow{FE}}=\boldsymbol{\overrightarrow{HD}}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 평면에서 두 벡터의 합을 이용하여 공간벡터의 합을 구해 보게 하려는 것이다.

1. 면 ABCD에서 벡터의 합 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$는 벡터 $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$와 같다.

2. 벡터 $\overrightarrow{CG}$를 정육면체에 나타내면 다음과 같다.



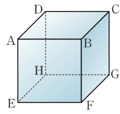
3. 벡터의 합 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$는 시점이 A이고 종점이 G인 벡터이므로 벡터 $\boldsymbol{\overrightarrow{AG}}$와 같다.

교과서 167 쪽

공간벡터의 연산은 어떻게 하는가?

탐구 활동 오른쪽 그림과 같은 정육면체에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

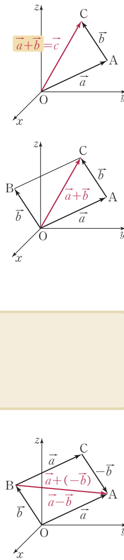
1. 면 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$와 같은 벡터를 찾아보자.
2. 벡터 $\overrightarrow{CG}$를 나타내어 보자.
3. 면 AEGC에서 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$와 같은 벡터를 찾아보자.



공간에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$가 되도록 세 점 O, A, C를 잡을 때, $\overrightarrow{OC}$로 나타내어지는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고, 기호로

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \text{ 또는 } \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

와 같이 나타낸다.



또한 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$이므로

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

이다.

평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터의 덧셈에 대하여 다음과 같은 연산법칙이 성립한다.

❶ **공간벡터의 덧셈에 대한 연산법칙**

세 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

❷ 평면에서와 마찬가지로 공간에서 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 차는 $\vec{a}-\vec{b}$로 나타내며 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $-\vec{b}$의 합과 같다. 즉,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

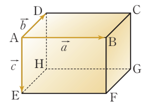
이다.

교과서 168 쪽

문제 3 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{AH}$ (2) $\overrightarrow{AG}$

(3) $\overrightarrow{FC}$ (4) $\overrightarrow{DF}$



공간에서 임의의 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$, 즉 벡터 $\vec{a}$의 실수배는 평면에서와 마찬가지이다.

즉, 임의의 실수 k와 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$의 실수배 $k\vec{a}$는 $k>0$이면 방향은 $\vec{a}$와 같고 크기는 $k|\vec{a}|$인 벡터이고, $k<0$이면 방향은 $\vec{a}$와 반대이고 크기는 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

● $|k||\vec{a}|=|k\vec{a}|$

한편 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터에서도 다음이 성립한다.

공간벡터의 실수배에 대한 성질

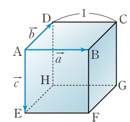
실수 k, l과 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

(1) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ (결합법칙)

(2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (분배법칙)

(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (분배법칙)

예제 01 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, $|2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$의 값을 구하여라.



풀이 오른쪽 그림과 같이 $2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$는 가로의 길이가 2이고, 세로의 길이와 높이가 각각 1인 직육면체 AB′C′D−EF′G′H에서 $\overrightarrow{AG'}$이므로

$$|\overrightarrow{AG'}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

답 $\sqrt{6}$

본문 해설

❶ 세 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$에 대하여 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙에서

(i) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AD}$

(ii) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{AD}$

(i), (ii)에서

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

❷ 평면벡터에서와 같이 공간벡터에서도 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 차는 $\vec{a}$와 $-\vec{b}$의 합과 같다. 벡터의 뺄셈은 덧셈의 역연산으로 이해한다.

3

목표 | 공간벡터의 덧셈에 대한 연산법칙을 이용하여 벡터의 덧셈을 할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$

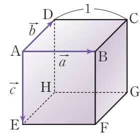
(2) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}$
$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})+\overrightarrow{FG}$
$=\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$

(3) $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}$
$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$
$=\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$

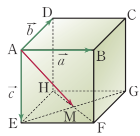
(4) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$
$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})-\overrightarrow{AD}$
$=\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$

교과서 169 쪽

문제 **4** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, $|\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}|$의 값을 구하여라.



발전 문제 **5** 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라 하고, $\overline{EG}$와 $\overline{FH}$의 교점을 M이라고 할 때, $\overrightarrow{AM}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



● 영벡터는 임의의 벡터와 평행하다고 생각할 수 있다.

평면에서와 마찬가지로 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며, 기호로 $\vec{a}/\!/\vec{b}$와 같이 나타낸다.

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

> **공간벡터의 평행**
> 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
> $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

● 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. 역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

보기 세 벡터 $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{r}=\vec{a}+2\vec{b}$에 대하여

$$\vec{p}+\vec{q}=(3\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-3\vec{b})=4\vec{a}-2\vec{b}$$
$$\vec{q}+\vec{r}=(\vec{a}-3\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b}$$

이고, $\vec{p}+\vec{q}=2(\vec{q}+\vec{r})$이므로 $\vec{p}+\vec{q}$와 $\vec{q}+\vec{r}$는 서로 평행하다.

❶ 문제 **6** 공간에서 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=m\vec{a}-3\vec{b}$$

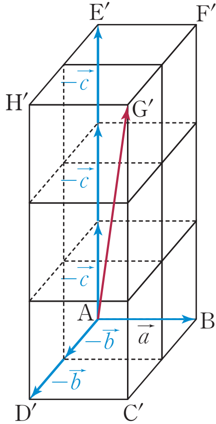
라고 할 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m의 값을 구하여라.
(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

4

목표| 공간벡터의 덧셈에 대한 연산법칙과 실수배에 대한 성질을 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$는 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 2, 높이가 3인 직육면체 $\mathrm{ABC'D'-E'F'G'H'}$에서 $\overrightarrow{AG'}$이므로

$$|\overrightarrow{AG'}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$$
$$=\sqrt{\mathbf{14}}$$



5

목표| 공간벡터의 덧셈에 대한 연산법칙과 실수배에 대한 성질을 이해하게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG})$

$$=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}}$$

본문 해설

❶ 네 점 A, B, C, D가 같은 평면 위에 있을 조건을 벡터로 나타낼 수 있도록 한다.
(i) $\overrightarrow{AD}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$ (단, p, q는 실수)
(ii) $\overrightarrow{OD}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$ (단, $p+q+r=1$)

6

목표| 공간벡터의 평행을 이용하여 세 점이 한 직선 위에 있도록 하는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=(m-1)\vec{a}-3\vec{b}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (단, $k\neq1$인 실수), 즉

$(m-1)\vec{a}-3\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$를 만족시키는 실수 k가 존재해야 한다.

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 평행하지 않으므로

$(m-1)\vec{a}-3\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$에서

$m-1=-k$, $k=-3$

따라서 $\boldsymbol{m=4}$

교과서 170 쪽

02 공간벡터의 성분과 내적

● 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

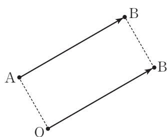
공간에서 위치벡터는 무엇인가?

탐구 활동

좌표공간에서 점 A(1, −2, 3)을 시점으로 하고 점 B(2, 1, 4)를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

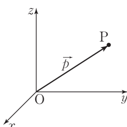
1. 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 점 A가 원점 O로 옮겨질 때, 점 B가 옮겨지는 점 B′의 좌표를 구하여 보자.

2. 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB'}$을 비교하여 보자.



❶ 평면에서와 마찬가지로 공간에서도 시점을 한 점 O로 정하면 공간에서 한 점 P와 벡터 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$는 일대일 대응한다. 이때 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 위치벡터라고 한다.

일반적으로 위치벡터의 시점 O는 좌표공간의 원점으로 잡는다.



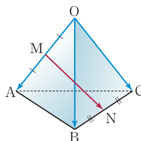
예제 01 정사면체에서 두 모서리 OA, BC의 중점을 각각 M, N이라고 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{MN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.

풀이 점 M은 모서리 OA의 중점이므로 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

점 N은 모서리 BC의 중점이므로

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

따라서 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$



답 $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

3. $\vec{a}\times\vec{b}$는 벡터적(vector product) 또는 벡터의 외적(cross product)을 나타내고, 벡터의 외적은 스칼라가 아니고 벡터임에 유의하여야 하며 고등학교 교육 과정을 벗어나는 내용이므로 지도하지 않도록 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 공간벡터의 시점과 종점이 다르더라도 크기와 방향이 같아서 평행이동하면 두 벡터가 일치할 때 두 벡터가 같다는 것을 이용하여 위치벡터의 개념을 도입하기 위한 것이다.

1. 점 A를 원점 O로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 −1만큼, y축의 방향으로 2만큼, z축의 방향으로 −3만큼 이동하는 것이므로 점 B는 B′(2−1, 1+2, 4−3), 즉 **B′(1, 3, 1)**로 옮겨진다.

2. 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동한 것이 벡터 $\overrightarrow{OB'}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB'}$은 크기와 방향이 같다. 따라서 서로 **같은 벡터**이다.

02 공간벡터의 성분과 내적

소단원 지도 목표

① 공간벡터의 위치벡터의 뜻을 알고, 임의의 공간벡터를 위치벡터를 이용하여 나타낼 수 있게 한다.
② 공간벡터의 성분의 뜻을 알고, 성분을 이용하여 공간벡터의 연산을 할 수 있게 한다.
③ 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
④ 공간벡터의 내적의 연산법칙이 성립함을 알게 한다.
⑤ 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

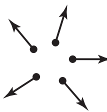
1. 위치벡터는 공간의 점과 벡터가 일대일 대응된다는 것을 설명하는 것임을 이해하게 한다.

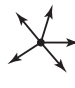
2. 좌표공간 위의 임의의 점은 단위벡터를 이용하여 나타낼 수 있음을 알게 한다.

본문 해설

❶ 평면 또는 공간에서 모든 벡터의 시점을 한 점에 고정시키면, 벡터와 점은 일대일 대응된다. 이 일대일 대응으로부터 각각의 위치벡터는 그 종점의 좌표를 하나씩 갖게 되는데, 이것이 벡터의 성분 표시와 같다.

[그림 1]과 같이 시점이 모두 다른 벡터는 연산을 하기 힘들다. 그러나 [그림 2]와 같이 벡터를 평행이동하여 5개의 벡터의 시점을 하나로 통일하면 벡터의 연산을 쉽게 할 수 있다.

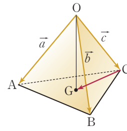

[그림 1]


[그림 2]

즉, 위치벡터는 평면 또는 공간 위에 있는 많은 벡터를 하나의 기준을 정해 묶어 주는 역할을 한다.

교과서 171 쪽

문제 1 오른쪽 그림과 같은 사면체에서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이고 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{CG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



공간벡터의 성분이란 무엇인가?

평면벡터와 같은 방법으로 공간벡터에 대해서도 그 성분을 생각할 수 있다.

점 O를 원점으로 하는 좌표공간에서 세 점 $E_1(1,\ 0,\ 0)$, $E_2(0,\ 1,\ 0)$, $E_3(0,\ 0,\ 1)$의 위치벡터 $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$을 각각 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$으로 나타낸다.

임의의 공간벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 $A_1(a_1,\ 0,\ 0)$, $A_2(0,\ a_2,\ 0)$, $A_3(0,\ 0,\ a_3)$이라고 하면 $\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OA_3}=a_3\vec{e_3}$이고 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$이므로

❶ $$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이때 실수 a_1, a_2, a_3을 공간벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, a_1, a_2, a_3을 각각 공간벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분, z성분이라고 한다.

또 공간벡터 $\vec{a}$를 성분을 이용하여 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$과 같이 나타낸다.

● 좌표공간에서 원점 O를 시점으로 하면 위치벡터 $\overrightarrow{OA}$는 종점 A의 좌표로 나타낼 수 있다.

보기 좌표공간에서 원점 O에 대한 점 $A(1,\ -2,\ 3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때
$\vec{a}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}+3\vec{e_3}=(1,\ -2,\ 3)$

문제 2 좌표공간에서 원점 O와 다음 점 A에 대하여 위치벡터 $\overrightarrow{OA}$를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$으로 나타내어라.
(단, $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$)

(1) $A(-1,\ 2,\ 3)$ (2) $A(3,\ -4,\ 0)$

문제 3 다음 공간벡터를 성분으로 나타내어라. (단, $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$)

(1) $\vec{a}=\vec{e_1}-3\vec{e_2}+2\vec{e_3}$ (2) $\vec{b}=-2\vec{e_1}+4\vec{e_3}$

교과서 172 쪽

좌표공간 위의 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$에 대하여 $\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$이므로 벡터 $\overrightarrow{OA}$의 크기는

$$|\overrightarrow{OA}|=\overline{OA}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

이다.

또 좌표공간 위의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 서로 같을 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **공간벡터의 크기와 두 공간벡터가 서로 같을 조건**
> $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때
> (1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
> (2) $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$

보기 $\vec{a}=(2,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}=(x,\ y,\ z)$이고 $\vec{a}=\vec{b}$이면
(1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ (2) $\vec{a}=\vec{b}$이므로 $x=2$, $y=-2$, $z=1$

문제 4 다음 공간벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}=(1,\ 0,\ 2)$ (2) $\vec{b}=(2,\ 5,\ -3)$

문제 5 두 공간벡터 $\vec{a}=(2l,\ -5,\ n-2)$, $\vec{b}=(-6,\ m+2,\ 4-2n)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, 세 실수 l, m, n의 값을 각각 구하여라.

평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 성분을 이용하여 나타내면 다음이 성립한다.

> **공간벡터의 성분에 의한 연산**
> $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때
> (1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$
> (2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$
> (3) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ (단, k는 실수)

보기 $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ 1,\ 4)$일 때
(1) $\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ 3,\ 7)$ (2) $2\vec{a}-3\vec{b}=(8,\ 1,\ -6)$

1

목표| 삼각형의 무게중심을 위치벡터를 이용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}$이고 무게중심 G는 삼각형 ABC의 세 중선을 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분하는 점이므로 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$이다.

따라서 $\overrightarrow{CG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{c}=\mathbf{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}}$

본문 해설

❶ 공간벡터의 성분도 평면벡터의 경우와 마찬가지로 모든 공간벡터는 세 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$의 실수배의 합으로 나타낼 수 있다.

2

목표| 위치벡터를 단위벡터를 이용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{OA}=-1(1,\ 0,\ 0)+2(0,\ 1,\ 0)+3(0,\ 0,\ 1)$
$=\mathbf{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}}$

(2) $\overrightarrow{OA}=3(1,\ 0,\ 0)-4(0,\ 1,\ 0)+0(0,\ 0,\ 1)$
$=\mathbf{3\vec{e_1}-4\vec{e_2}}$

3

목표| 공간벡터를 성분을 이용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}=\vec{e_1}-3\vec{e_2}+2\vec{e_3}$
$=(1,\ 0,\ 0)-3(0,\ 1,\ 0)+2(0,\ 0,\ 1)$
$=\mathbf{(1,\ -3,\ 2)}$

(2) $\vec{b}=-2\vec{e_1}+4\vec{e_3}$
$=-2(1,\ 0,\ 0)+0(0,\ 1,\ 0)+4(0,\ 0,\ 1)$
$=\mathbf{(-2,\ 0,\ 4)}$

문제 6 $\vec{a}=(1,\ 1,\ -2)$, $\vec{b}=(2,\ 0,\ -3)$, $\vec{c}=(-1,\ 4,\ 1)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내어라.

(1) $\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}$ (2) $2(-\vec{a}+3\vec{b})+3(\vec{a}+4\vec{c})$

문제 7 $\vec{a}=(-1,\ -1,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ -4,\ -2)$일 때, $\vec{x}+\vec{b}=2\vec{a}-2\vec{x}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 성분으로 나타내어라.

좌표공간에서 두 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내면 $\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이므로

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(b_1,\ b_2,\ b_3)-(a_1,\ a_2,\ a_3)$$
$$=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$

이고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점에 대한 공간벡터의 성분과 크기

좌표공간에서 두 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2\ b_3-a_3)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

보기 두 점 $A(2,\ 1,\ -3)$, $B(-1,\ 2,\ 1)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1-2,\ 2-1,\ 1-(-3))=(-3,\ 1,\ 4)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+1^2+4^2}=\sqrt{26}$

문제 8 다음 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 성분과 크기를 구하여라.

(1) $A(1,\ -2,\ -3)$, $B(3,\ -4,\ -1)$

(2) $A(-3,\ 2,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ -5)$

4

목표| 성분으로 나타내어진 공간벡터의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $|\vec{a}|=\sqrt{5}$ (2) $|\vec{b}|=\sqrt{38}$

5

목표| 성분으로 나타내어진 두 공간벡터가 서로 같을 조건을 알게 한다.

풀이| $2l=-6$에서 $l=\mathbf{-3}$

$-5=m+2$에서 $m=\mathbf{-7}$

$n-2=4-2n$에서 $n=\mathbf{2}$

6

목표| 공간벡터의 성분에 의한 연산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}$

$=(1,\ 1,\ -2)-3(2,\ 0,\ -3)-2(-1,\ 4,\ 1)$

$=\mathbf{(-3,\ -7,\ 5)}$

(2) $2(-\vec{a}+3\vec{b})+3(\vec{a}+4\vec{c})$

$=\vec{a}+6\vec{b}+12\vec{c}$

$=(1,\ 1,\ -2)+6(2,\ 0,\ -3)+12(-1,\ 4,\ 1)$

$=\mathbf{(1,\ 49,\ -8)}$

7

목표| 공간벡터의 성분에 의한 연산을 할 수 있게 한다.

풀이| $3\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$에서 $\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$이므로

$\vec{x}=\frac{2}{3}(-1,\ -1,\ 4)-\frac{1}{3}(3,\ -4,\ -2)$

$=\mathbf{\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{10}{3}\right)}$

8

목표| 공간벡터의 성분과 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(3,\ -4,\ -1)-(1,\ -2,\ -3)$

$=\mathbf{(2,\ -2,\ 2)}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(0,\ 1,\ -5)-(-3,\ 2,\ 0)$

$=\mathbf{(3,\ -1,\ -5)}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-5)^2}=\mathbf{\sqrt{35}}$

지/도/자/료 공간벡터와 평행한 단위벡터

두 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 평행한 단위벡터를 구하여 보자.

벡터 $\overrightarrow{AB}$와 평행한 단위벡터는 크기가 1이고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같은 것과 방향이 반대인 것 두 가지가 있다.

즉, $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$의 두 가지이다.

두 벡터를 각각 성분으로 나타내면

$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$,

$-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=-\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

(단, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$)

교과서 174 쪽

공간벡터의 내적이란 무엇인가?

평면에서와 마찬가지로 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$인 세 점 O, A, B를 정할 때, $\angle AOB=\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.

이때 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

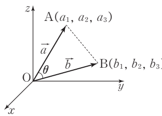
와 같이 나타낸다. 즉,

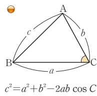
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다.

공간벡터의 내적의 성분 표시도 평면에서의 벡터와 마찬가지로 생각한다.

오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라고 하자. 이때 삼각형 OAB에서





$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$가 성립한다.

$\overline{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$

$\overline{OA}^2=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

$\overline{OB}^2=|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$

이므로 $\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$이다. 그런데 $\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

공간벡터의 내적

(1) 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0\le\theta\le\pi)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(2) $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때

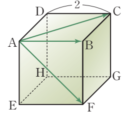
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

교과서 175 쪽

예제 02 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$



풀이 (1) $\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$$

(2) 삼각형 ACF는 정삼각형이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

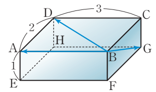
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=4$$

답 (1) 4 (2) 4

문제 9 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=3$, $\overline{AE}=1$인 직육면체에서 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BG}$



문제 10 다음 두 공간벡터의 내적을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(2, 4, 1)$, $\vec{b}=(3, 2, -2)$

(2) $\vec{a}=(1, -2, -3)$, $\vec{b}=(1, 0, -1)$

평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터도 다음과 같이 내적에 대한 연산법칙이 성립한다.

공간벡터의 내적의 연산법칙

세 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (결합법칙)

문제 11 세 공간벡터 $\vec{a}=(-2, 1, 3)$, $\vec{b}=(4, -3, 5)$, $\vec{c}=(3, 0, -1)$과 실수 k에 대하여 내적의 연산법칙 (1), (2), (3)이 성립함을 확인하여라.

9

목표| 공간벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{BD}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cos\theta$$

$$=3\times\sqrt{13}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$=\mathbf{9}$$

(2) $\overline{BG}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BG}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BG}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BG}|\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=3\times\sqrt{5}\times0$$

$$=\mathbf{0}$$

10

목표| 성분으로 나타내어진 공간벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+4\times2+1\times(-2)=\mathbf{12}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+(-2)\times0+(-3)\times(-1)=\mathbf{4}$

11

목표| 공간벡터의 내적의 연산법칙을 이해하고, 이를 각각 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8+(-3)+15=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-14+(-3)+12=-5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=\{-8+(-3)+15\}+\{-6+0+(-3)\}=-5$

따라서 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=6+0+(-8)=-2$

교과서 176 쪽

두 공간벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

❶ 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라고 하면 내적의 정의에 의하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 공간벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$일 때

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

보기 두 공간벡터 $\vec{a}=(-1,\ 3,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$\cos\theta=\frac{(-1)\times2+3\times1+2\times3}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

문제 12 다음 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)$ (2) $\vec{a}=(0,\ -1,\ 0)$, $\vec{b}=(2,\ 0,\ 1)$

예제 03 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 k의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(3,\ k,\ 2)$, $\vec{b}=(k,\ 4,\ -7)$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{b}$

(2) $\vec{a}=(-1,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ k,\ -2)$에 대하여 $\vec{a}/\!/\vec{b}$

● $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

● $\vec{a}/\!/\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

풀이 (1) $\vec{a}\perp\vec{b}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로 $3k+4k-14=0$, $k=2$

(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$이므로 $2k-4=\pm\sqrt{6}\sqrt{k^2+8}$, $k=-4$

답 (1) 2 (2) −4

문제 13 다음 두 공간벡터가 서로 수직일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(2,\ k-1,\ 5)$, $\vec{b}=(k,\ 3,\ k)$ (2) $\vec{a}=(2,\ 4,\ k)$, $\vec{b}=(1,\ k,\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=\{-6+0+(-3)\}+\{12+0+(-5)\}$
$=-2$

따라서 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\{-8+(-3)+15\}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k\{-8+(-3)+15\}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

따라서 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

본문 해설

❶ 영벡터가 아닌 두 공간벡터의 성분이 주어지면 각 벡터의 크기와 두 벡터의 내적을 구할 수 있으므로 내적의 정의를 이용하여 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

이때 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각은 벡터 $\vec{b}$와 벡터 $\vec{a}$의 벡터 $\vec{b}$ 위로의 정사영이 이루는 각이다.

12

목표| 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 두 공간벡터 $\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)$이 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{1\times2+2\times1+(-1)\times1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

(2) 두 공간벡터 $\vec{a}=(0,\ -1,\ 0)$, $\vec{b}=(2,\ 0,\ 1)$이 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{0\times2+(-1)\times0+0\times1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{2^2+0^2+1^2}}=0$$

이므로 $\theta=\frac{\pi}{2}$

13

목표| 두 공간벡터가 서로 수직일 조건을 이해하게 한다.

풀이| (1) $\vec{a}\perp\vec{b}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$2k+3(k-1)+5k=0$, $10k=3$

따라서 $k=\frac{3}{10}$

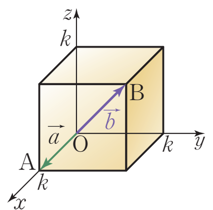
(2) $\vec{a}\perp\vec{b}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$2+4k+k=0$, $5k=-2$

따라서 $k=-\frac{2}{5}$

14

목표| 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.



풀이| 정육면체를 오른쪽 그림과 같이 한 꼭짓점에서 만나는 세 모서리가 좌표축과 겹치도록 좌표공간에 놓고, 이 정육면체의 한 모서리의 길이를 k라고 하자.

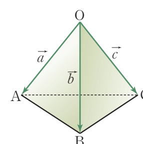
꼭짓점 $\mathrm{A}(k,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(k,\ k,\ k)$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라고 하면 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{k^2}{k\times k\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

교과서 177 쪽

발전 **문제 14** 정육면체의 한 대각선과 한 모서리가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

예제 04 사면체 OABC에서 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$이면 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$임을 증명하여라.



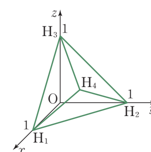
증명 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 하면 $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$,
$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$
$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$에서 $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$에서 $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$이므로 $\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$
따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$이다.
$\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{AB}$의 내적을 구하면
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$
따라서 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$이다.

문제 15 벡터의 내적을 이용하여 정사면체 OABC에서 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$임을 증명하여라.

창의 up 두 공간벡터 $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)$에 동시에 수직인 단위벡터를 구하는 방법을 설명하여라.

단원 과제 앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

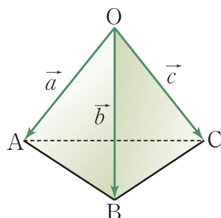
분자식이 CH_4인 메테인 분자의 구조를 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 세 개의 수소 원자 H_1, H_2, H_3을 각각 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$의 위치에 놓았다고 할 때, 탄소 원자(C)와 나머지 하나의 수소 원자(H_4)의 좌표를 구하여라.



15

목표| 벡터의 내적을 이용하여 두 공간벡터가 서로 수직임을 증명할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같은 정사면체 OABC에서



$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$이고

$\angle AOB=\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2\cos\dfrac{\pi}{3}-|\vec{a}|^2\cos\dfrac{\pi}{3}$
$=0$

따라서 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$이다.

창의 UP

출제 의도| 두 공간벡터에 동시에 수직인 단위벡터를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\vec{a}$, $\vec{b}$에 동시에 수직인 벡터를 $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$라고 하면

$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$에서 $x-y+2z=0$ ······ ①

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$에서 $2x+y+z=0$ ······ ②

①, ②에서 $y=-x,\ z=-x$

따라서 $\vec{c}=(x,\ -x,\ -x)$이고

$\sqrt{x^2+(-x)^2+(-x)^2}=1$

이므로 구하는 단위벡터는 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$이다.

단원 과제

목표| 벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 수소 원자 H_4의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면

$\overrightarrow{H_1H_4}=(a-1,\ b,\ c)$, $\overrightarrow{H_2H_4}=(a,\ b-1,\ c)$,

$\overrightarrow{H_3H_4}=(a,\ b,\ c-1)$

네 개의 수소 원자는 정사면체를 이루므로 세 벡터의 크기는 모두 $\sqrt{2}$이다.

또 벡터의 내적에 의하여

$\overrightarrow{H_1H_4}\cdot\overrightarrow{H_2H_4}=a(a-1)+b(b-1)+c^2=1$ ······ ①

$\overrightarrow{H_2H_4}\cdot\overrightarrow{H_3H_4}=a^2+b(b-1)+c(c-1)=1$ ······ ②

$\overrightarrow{H_1H_4}\cdot\overrightarrow{H_3H_4}=a(a-1)+b^2+c(c-1)=1$ ······ ③

①, ②, ③에서

$a=1,\ b=1,\ c=1$ 또는 $a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3},\ c=-\dfrac{1}{3}$

따라서 $H_4(1,\ 1,\ 1)$ 또는 $H_4\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$이다.

한편 네 점 H_1, H_2, H_3, H_4의 위치벡터를 차례로 $\vec{h_1}$, $\vec{h_2}$, $\vec{h_3}$, $\vec{h_4}$라고 하면, 정사면체의 중심에 있는 탄소 원자 C의 위치벡터 $\vec{c}$는 $\vec{c}=\dfrac{\vec{h_1}+\vec{h_2}+\vec{h_3}+\vec{h_4}}{4}$이다.

따라서 $H_4(1,\ 1,\ 1)$인 경우에 탄소 원자 C의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

교과서 178 쪽

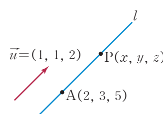
03 직선의 방정식

● 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.

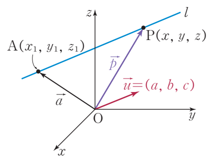
좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림에서 $\vec{u}=(1,\ 1,\ 2)$이고 점 $P(x,\ y,\ z)$는 점 $A(2,\ 3,\ 5)$를 지나는 직선 l 위에 있다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. $\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$ (t는 실수)일 때, 벡터의 성분을 이용하여 $x,\ y,\ z$를 t의 식으로 나타내어 보자.
2. 1의 결과에서 t를 소거하여 $x,\ y,\ z$ 사이의 관계식을 구하여 보자.



평면에서와 마찬가지로 좌표공간에서 한 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$에 평행한 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overrightarrow{AP}\,/\!/\,\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$이므로 $\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u}$에서

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

● ①을 직선 l의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 실수 t의 값이 변함에 따라 점 A를 지나고, 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 직선 l을 나타낸다. 이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 방향벡터라고 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$이므로 ①은

$$(x,\ y,\ z)=(x_1,\ y_1,\ z_1)+t(a,\ b,\ c)=(x_1+at,\ y_1+bt,\ z_1+ct)$$

이다. 따라서 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x=x_1+at,\ y=y_1+bt,\ z=z_1+ct \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 여기서 $abc\neq0$일 때, t를 소거하면 다음과 같은 직선 l의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

● $abc\neq0$일 때, ②를 직선 l의 매개변수방정식이라 하고, t를 매개변수라고 한다. 즉, 공간에서 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식은 직선의 매개변수 표현이다.

03 직선의 방정식

소단원 지도 목표

① 좌표공간에서 방향벡터의 뜻을 알게 한다.
② 좌표공간에서 한 점을 지나고 방향벡터에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
④ 좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.
⑤ 좌표공간에서 두 직선의 평행 · 수직 조건을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 좌표평면 또는 좌표공간의 어떤 직선 위의 모든 점의 위치벡터를 규정하는 벡터에 대한 등식을 그 직선의 벡터방정식이라고 함을 이해하게 한다.

2. 좌표평면에서 기울기의 역할을 하는 방향벡터를 이용하면 좌표공간에서의 직선의 벡터방정식을 간단히 나타낼 수 있음을 이해하고 구할 수 있게 한다.

3. 좌표공간에서 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식이 직선의 매개변수 표현임을 이해하게 한다.

4. 방향벡터를 이용하여 좌표공간에서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있게 한다.

5. 방향벡터를 이용하여 좌표공간에서 두 직선의 위치관계를 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 평행한 두 공간벡터의 성분을 서로 비교해 봄으로써 좌표공간에서 직선의 방정식을 어떻게 구하는지 알아보기 위한 것이다.

1. $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-2,\ y-3,\ z-5)$이므로
$(x-2,\ y-3,\ z-5)=(t,\ t,\ 2t)$에서

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=5+2t \end{cases}$$

2. 1에서 구한 식을 t에 대하여 정리하면

$$\begin{cases} t=x-2 \\ t=y-3 \\ t=\dfrac{z-5}{2} \end{cases}$$

따라서 t를 소거하여 $x,\ y,\ z$의 관계식을 구하여 보면

$$x-2=y-3=\frac{z-5}{2}$$

교과서 179 쪽

❶ 한편 $abc=0$일 때, ②에서 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

예를 들어 $a=0$, $bc\neq0$일 때 직선 l의 방정식은

$$x=x_1,\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 yz평면과 평행한 직선을 나타낸다.

또 $a\neq0$, $b=0$, $c=0$일 때 직선 l의 방정식은

$$y=y_1,\ z=z_1$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 x축과 평행한 직선을 나타낸다.

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

이고, 이 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나므로 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 직선의 방정식

(1) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ (\text{단, } abc\neq0)$$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2)$$

$x_1=x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1\neq z_2$일 때 직선의 방정식은 $x=x_1,\ \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

보기 (1) 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(4,\ 1,\ 3)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(2,\ -3,\ 7)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{7}$$

(2) 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 5,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{5-3}=\frac{z-1}{-2-1} \text{ 이므로 } \frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-3}$$

문제 1 좌표공간에서 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 1)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(-5,\ 1,\ 3)$인 직선

(2) 점 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(0,\ 1,\ -1)$인 직선

(3) 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1,\ 2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(0,\ 2,\ 0)$인 직선

(4) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 2,\ -1)$을 지나는 직선

본문 해설

❶ 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 방향벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$인 직선의 매개변수방정식 $x=x_1+at$, $y=y_1+bt$, $z=z_1+ct$(t는 실수)에 대하여

(1) 좌표평면과 평행한 직선

(i) $c=0$, $ab\neq0$일 때, 즉 xy평면과 평행한 직선의 방정식은

$x=x_1+at$, $y=y_1+bt$, $z=z_1$에서

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b},\ z=z_1$$

(ii) $b=0$, $ac\neq0$일 때, 즉 zx평면과 평행한 직선의 방정식은

$x=x_1+at$, $y=y_1$, $z=z_1+ct$

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c},\ y=y_1$$

(iii) $a=0$, $bc\neq0$일 때, 즉 yz평면과 평행한 직선의 방정식은

$x=x_1$, $y=y_1+bt$, $z=z_1+ct$에서

$$x=x_1,\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

(2) 좌표축과 평행한 직선

(i) $a\neq0$, $b=0$, $c=0$일 때, 즉 x축과 평행한 직선의 방정식은

$x=x_1+at$, $y=y_1$, $z=z_1$

이고 이를 간단히 $y=y_1$, $z=z_1$으로 나타낸다.

(ii) $a=0$, $b\neq0$, $c=0$일 때, 즉 y축과 평행한 직선의 방정식은 $x=x_1$, $z=z_1$

(iii) $a=0$, $b=0$, $c\neq0$일 때, 즉 z축과 평행한 직선의 방정식은 $x=x_1$, $y=y_1$

1

목표| 좌표공간에서 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{\dfrac{x-2}{-5}=y+1=\dfrac{z-1}{3}}$

(2) $\mathbf{x=1,\ y=\dfrac{z-2}{-1}}$

(3) $\mathbf{x=-1,\ z=2}$

(4) $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y+1}{2+1}=\dfrac{z-3}{-1-3}$에서

$$\mathbf{\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}}$$

2

목표| 주어진 직선의 방향벡터를 구하여 그 직선과 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(-1,\ -1,\ 5)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\mathbf{\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{5}}$$

(2) $x=t+1$, $y=-2t-4$, $z=3t+5$를 t에 대하여 풀면

$x-1=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-5}{3}$이므로 주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(1,\ -2,\ 3)$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$\mathbf{x-1=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}}$$

교과서 180 쪽

예제 01 좌표공간에서 점 A$(0,\ 1,\ 1)$을 지나고, 직선 $\frac{x+2}{-3}=\frac{1-y}{2}=\frac{z}{5}$와 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(-3,\ -2,\ 5)$이다.
따라서 구하는 직선은 점 A$(0,\ 1,\ 1)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(-3,\ -2,\ 5)$인 직선이므로 $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{5}$

답 $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{5}$

문제 2 좌표공간에서 점 A$(1,\ -1,\ 0)$을 지나고, 다음 직선과 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{5}$

(2) $x=t+1,\ y=-2t-4,\ z=3t+5$ (단, t는 실수)

좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

❶ 평면에서와 마찬가지로 좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여 보자.

방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$인 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기를 α라고 할 때, 다음이 성립한다.

z, l_1, l_2, θ, $\vec{u_1}$, α, $\vec{u_2}$, O, y, x

두 직선이 이루는 각의 크기는 α와 $\pi-\alpha$ 중 크지 않은 쪽이다.

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

예제 02 좌표공간에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x+1}{2}=y-2=z,\ l_2:\ x-1=\frac{y-2}{2}=3-z$$

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(2,\ 1,\ 1)$, $\vec{u_2}=(1,\ 2,\ -1)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\cos\theta=\frac{|2\times1+1\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

교과서 181 쪽

문제 3 좌표공간에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{4},\ l_2:\ x-1=\frac{y+2}{10}=\frac{z-3}{7}$$

❷ 한편 평면에서와 마찬가지로 좌표공간에서 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때, 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.
또 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 직선의 평행 · 수직 조건

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$일 때

(1) 평행 조건: $l_1 /\!/ l_2 \iff \vec{u_1}=t\vec{u_2}$ (단, t는 0이 아닌 실수)
$\iff a_1 : b_1 : c_1=a_2 : b_2 : c_2$

(2) 수직 조건: $l_1\perp l_2 \iff \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$
$\iff a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

예제 03 좌표공간에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{2-x}{3}=\frac{y-1}{k}=\frac{z}{6},\ l_2:\ x=\frac{y}{-3}=\frac{z-5}{-2}$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(-3,\ k,\ 6)$, $\vec{u_2}=(1,\ -3,\ -2)$이고
(1) $l_1 /\!/ l_2$일 때, $-3 : k : 6=1 : -3 : -2$이므로 $k=9$
(2) $l_1\perp l_2$일 때, $-3\times1+k\times(-3)+6\times(-2)=0$이므로 $k=-5$

답 (1) 9 (2) -5

문제 4 좌표공간에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{k}=z,\ l_2:\ \frac{x-1}{k+1}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{2}$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

본문 해설

❶ 두 직선의 방향벡터는 방향을 가지고 있으므로 각의 크기는 예각, 직각, 둔각 중 하나이지만 두 직선이 이루는 각은 예각 또는 직각이므로 이 두 각이 일치하지 않을 수도 있다. 그러므로 이 두 각을 각각 α와 θ로 구별함에 유의한다.

3

목표| 좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(-3,\ 5,\ 4)$, $\vec{u_2}=(1,\ 10,\ 7)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|-3\times1+5\times10+4\times7|}{\sqrt{(-3)^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+10^2+7^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

본문 해설

❷ 두 직선 l_1, l_2가 꼬인 위치에 있더라도 그 방향벡터가 수직이면 두 직선은 수직임에 유의한다.

4

목표| 좌표공간에서 두 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선의 위치 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(2,\ k,\ 1)$, $\vec{u_2}=(k+1,\ 6,\ 2)$이다.

(1) $l_1 /\!/ l_2$일 때,
$2 : k : 1=(k+1) : 6 : 2$이므로
$\boldsymbol{k=3}$

(2) $l_1\perp l_2$일 때,
$2\times(k+1)+k\times6+1\times2=0$이므로
$\boldsymbol{k=-\frac{1}{2}}$

04 평면과 구의 방정식

소단원 지도 목표

① 좌표공간에서 법선벡터의 뜻을 알게 한다.
② 좌표공간에서 한 점을 지나고 법선벡터에 수직인 평면의 방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 좌표공간에서 일차방정식과 평면의 관계를 이해하게 한다.
④ 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하고, 두 평면의 평행 · 수직 조건을 이해하게 한다.
⑤ 좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
⑥ 좌표공간에서 벡터를 이용한 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교과서 182 쪽

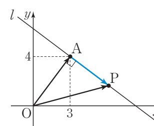
04 평면과 구의 방정식

● 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.

좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식을 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 점 A(3, 4)를 지나고 $\overrightarrow{OA}$에 수직인 직선 l 위의 임의의 점 P(x, y)에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



1. 벡터 $\overrightarrow{AP}$의 x성분과 y성분을 구하여 보자.
2. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP}=0$임을 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구하여 보자.

좌표공간에서 한 점 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면 α의 방정식을 구하여 보자.

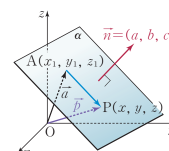
❶ 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위의 임의의 점을 P$(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}=0$$

이다. 이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot \vec{n}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.



● ①을 평면 α의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α 위에 있다.

따라서 ①은 평면 α를 나타낸다. 이때 벡터 $\vec{n}$을 평면 α의 법선벡터라고 한다.

이제 평면 α의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

평면 α의 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$이고, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$$

이고, 이것을 ①에 대입하면 내적의 정의에 의하여 다음과 같은 평면 α의 방정식을 얻는다.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

● 평면의 법선벡터를 이용하여 나타낸 평면의 방정식은 평면의 방정식을 음함수로 나타낸 것이다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 벡터를 사용하면 좌표공간에서 평면과 구의 방정식을 간단히 나타낼 수 있음을 알게 한다.

2. 좌표공간에서 직선과 평면의 수직 조건을 활용하여 벡터를 이용한 평면의 방정식을 간단히 나타낼 수 있음을 이해하고 구할 수 있게 한다.

3. 좌표공간에서 법선벡터를 이용하여 나타낸 평면의 방정식은 평면의 방정식을 음함수로 나타낸 것임을 이해하게 한다.

4. 좌표공간에서 직선을 음함수로 표현하려면 평면의 방정식이 두 개 필요함을 이해하게 한다.

5. 법선벡터를 이용하여 좌표공간에서 두 평면의 위치관계를 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

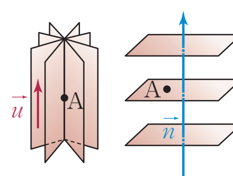
활동 목표 • 좌표평면에서 두 벡터의 수직 조건을 이용하여 좌표공간에서 평면의 방정식을 어떻게 구하는지 알아보기 위한 것이다.

1. $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-3,\ y-4)$이므로 x성분은 $\boldsymbol{x-3}$, y성분은 $\boldsymbol{y-4}$이다.

2. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP}=(3,\ 4) \cdot (x-3,\ y-4)=3x+4y-25$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP}=0$이므로 x와 y 사이의 관계식은 $\boldsymbol{3x+4y-25=0}$이다.

본문 해설

❶ 평면 위의 한 점 A와 평면에 수직인 한 벡터 $\vec{n}$은 평면의 결정조건이 된다. 즉, 한 점 A를 지나며 특정한 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면은 단 하나로 정해진다.
[그림 1]처럼 공간에서 한 점 A를 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 평면은 무수히 많다.
그러나 [그림 2]처럼 한 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면은 유일하다.



[그림 1] [그림 2]

교과서 183 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **좌표공간에서 평면의 방정식**

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

예제 01 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$를 지나고, 법선벡터가 다음과 같은 평면의 방정식을 구하여라.

(1) $\vec{n}=(-1,\ 2,\ -2)$ (2) x축

풀이 (1) 법선벡터가 $\vec{n}=(-1,\ 2,\ -2)$이므로 구하는 평면의 방정식은

$-(x-1)+2y-2(z-2)=0$에서 $x-2y+2z-5=0$

(2) 법선벡터로 $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$을 택할 수 있으므로 구하는 평면의 방정식은

$1\times(x-1)+0\times y+0\times(z-2)=0$에서 $x=1$

답 (1) $x-2y+2z-5=0$ (2) $x=1$

문제 1 좌표공간에서 다음 평면의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 2)$를 지나고, 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 1,\ -3)$인 평면

(2) 점 $\mathrm{A}(2,\ -3,\ 5)$를 지나고, 직선 $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{2}$에 수직인 평면

(3) 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0,\ 2)$를 지나고, z축에 수직인 평면

평면의 방정식 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$을 변형하면

$$ax+by+cz-(ax_1+by_1+cz_1)=0$$

이다. 여기서 $-(ax_1+by_1+cz_1)=d$로 놓으면 평면의 방정식은

$$ax+by+cz+d=0$$

과 같이 $x,\ y,\ z$에 대한 일차방정식으로 나타내어진다.

본문 해설

❶ 좌표공간에서 평면의 결정조건

(1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3,\ z_3)$은 하나의 평면을 결정하므로 일직선 위에 있지 않은 세 점이 주어지면 이 세 점을 지나는 평면의 방정식 $ax+by+cz+d=0$을 결정할 수 있다. 실제로

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -d \\ -d \\ -d \end{pmatrix}$$

임을 이용하여 $a,\ b,\ c$를 구할 수 있다.

(2) 평행한 두 직선은 한 평면을 유일하게 결정하므로 평행한 두 직선

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

로부터 평면의 방정식을 유도할 수 있다.

평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라고 하면 이 벡터는

$\vec{u_1}=(l_1,\ m_1,\ n_1)$, $\vec{u_2}=(l_2,\ m_2,\ n_2)$, $\vec{v}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$과 수직이고, 이로부터 $a,\ b,\ c$를 결정할 수 있다.

(3) 한 점에서 만나는 두 직선의 경우도 (2)와 비슷하게 구할 수 있다.

(4) 한 직선과 이 직선 위에 있지 않은 한 점은 평면을 유일하게 결정한다. 즉, 직선 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$과 이 직선 위에 있지 않은 점 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라고 하면 벡터 $\vec{n}$은 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(l,\ m,\ n)$과 수직이고, 또 벡터 $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$과 수직, 그리고 삼수선의 정리에 의하여 벡터 $\vec{u}$와 벡터 $(a-x_2,\ b-y_2,\ c-z_2)$가 수직임을 이용하여 벡터 $\vec{n}$을 결정할 수 있다.

1

목표| 좌표공간에서 평면의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 평면의 방정식은

$2(x-2)+(y+1)-3(z-2)=0$에서

$\boldsymbol{2x+y-3z+3=0}$

(2) 법선벡터가 $\vec{n}=(-1,\ 3,\ 2)$이므로 구하는 평면의 방정식은

$-(x-2)+3(y+3)+2(z-5)=0$에서

$\boldsymbol{x-3y-2z-1=0}$

(3) 법선벡터로 $\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$을 택할 수 있으므로 구하는 평면의 방정식은

$0\times(x+1)+0\times y+1\times(z-2)=0$에서

$\boldsymbol{z=2}$

본문 해설

❶ 세 점 $(x_1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ y_1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ z_1)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여 보자.
평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ ……①

이라고 하면 세 점 $(x_1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ y_1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ z_1)$을 지나므로

$ax_1+d=0,\ by_1+d=0,\ cz_1+d=0$

$a=-\dfrac{d}{x_1},\ b=-\dfrac{d}{y_1},\ c=-\dfrac{d}{z_1}$이고, 이를 ①에 대입하면

$-\dfrac{d}{x_1}x-\dfrac{d}{y_1}y-\dfrac{d}{z_1}z+d=0$

$d\neq0$이므로 양변을 d로 나누면

$\dfrac{x}{x_1}+\dfrac{y}{y_1}+\dfrac{z}{z_1}=1$

2

목표| 좌표공간에서 서로 다른 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라고 하면 평면은 세 점 A, B, C를 지나므로

(1) $a+d=0,\ 2b+d=0,\ 3c+d=0$
이 연립방정식을 풀어서 $a,\ b,\ c$를 각각 d로 나타내면 $a=-d,\ b=-\dfrac{1}{2}d,\ c=-\dfrac{1}{3}d$
따라서 $d\neq0$이므로 구하는 평면의 방정식은
$-dx-\dfrac{1}{2}dy-\dfrac{1}{3}dz+d=0$에서 $\boldsymbol{6x+3y+2z-6=0}$

(2) $b+d=0,\ -a+c+d=0,\ a-b+d=0$
이 연립방정식을 풀어서 $a,\ b,\ c$를 각각 d로 나타내면
$a=-2d,\ b=-d,\ c=-3d$
따라서 $d\neq0$이므로 구하는 평면의 방정식은
$-2dx-dy-3dz+d=0$에서 $\boldsymbol{2x+y+3z-1=0}$

(3) $a+b+2c+d=0,\ -a+b+3c+d=0,\ 2a+c+d=0$
이 연립방정식을 풀어서 $a,\ b,\ c$를 각각 d로 나타내면
$a=-\dfrac{1}{4}d,\ b=\dfrac{1}{4}d,\ c=-\dfrac{1}{2}d$
따라서 $d\neq0$이므로 구하는 평면의 방정식은
$-\dfrac{1}{4}dx+\dfrac{1}{4}dy-\dfrac{1}{2}dz+d=0$에서
$\boldsymbol{x-y+2z-4=0}$

교과서 184 쪽

일차방정식 $ax+by+cz+d=0$은 $a,\ b,\ c$ 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a\neq0$일 때

$$a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이 방정식은 점 $\left(-\dfrac{d}{a},\ 0,\ 0\right)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식이다.
같은 방법으로 $b\neq0$ 또는 $c\neq0$인 경우도 $a\neq0$인 경우와 마찬가지이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **좌표공간에서 일차방정식과 평면**
> 좌표공간에서 $x,\ y,\ z$에 대한 일차방정식 $ax+by+cz+d=0$은 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면을 나타낸다.

좌표평면에서 $x,\ y$에 대한 일차방정식은 직선의 방정식이지만 좌표공간에서 $x,\ y,\ z$에 대한 일차방정식은 평면의 방정식이다.

❶ **예제 02** 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3,\ 3)$, $\mathrm{C}(1,\ 5,\ 0)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라고 하면 평면은 세 점 A, B, C를 지나므로

$$a+b-c+d=0,\ -a+3b+3c+d=0,\ a+5b+d=0$$

이 연립방정식을 풀어서 $a,\ b,\ c$를 각각 d로 나타내면

$$a=-\frac{7}{2}d,\ b=\frac{1}{2}d,\ c=-2d$$

그런데 $d=0$이면 $a=b=c=0$이므로 $d\neq0$
따라서 구하는 평면의 방정식은 $-\dfrac{7}{2}dx+\dfrac{1}{2}dy-2dz+d=0$에서

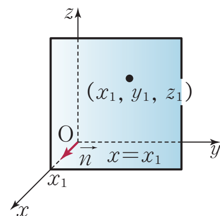
$$7x-y+4z-2=0$$

답 $7x-y+4z-2=0$

문제 2 좌표공간에서 다음 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.
(1) $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$
(2) $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$
(3) $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{C}(2,\ 0,\ 1)$

지/도/자/료 좌표평면과 평행한 평면의 방정식

점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 yz평면과 평행한 평면의 방정식을 구하여 보자.
yz평면에 평행한 평면은 x축에 수직인 평면이므로 법선벡터를 x축이라고 놓을 수 있다. 즉



$\vec{n}=(a,\ 0,\ 0)$

점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 $\vec{n}=(a,\ 0,\ 0)$에 수직인 평면의 방정식은

$a(x-x_1)+0(y-y_1)+0(z-z_1)=0$

따라서 $x=x_1$

같은 방법으로 zx평면, xy평면에 평행한 평면의 방정식을 구하면 다음과 같다.

(1) zx평면과 평행한 평면의 방정식: $y=y_1$
(2) xy평면에 평행한 평면의 방정식: $z=z_1$

교과서 185 쪽

① 예제 03 좌표공간에서 다음 두 평면의 교선의 방정식을 구하여라.

$$3x+2y-4z-1=0,\ x+y-z-5=0$$

풀이 두 평면의 교선은 두 평면의 방정식 $3x+2y-4z-1=0$, $x+y-z-5=0$을 동시에 만족시키는 점 $(x,\ y,\ z)$의 집합이다.
두 평면의 방정식에서 각각 y, x를 소거하면 $x-2z+9=0$, $-y-z+14=0$
z를 x, y로 나타내면 $z=\frac{x+9}{2}$, $z=-y+14$
따라서 구하는 교선의 방정식은 $\frac{x+9}{2}=\frac{y-14}{-1}=z$이다.

답 $\frac{x+9}{2}=\frac{y-14}{-1}=z$

● 공간에서 직선을 음함수로 표현하려면 평면의 방정식이 두 개 필요하다.

문제 3 좌표공간에서 다음 두 평면의 교선의 방정식을 구하여라.

$$x-y+z-1=0,\quad 2x+y-2z-1=0$$

② 예제 04 좌표공간에서 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}$와 평면 $2x+3y-z+5=0$의 교점의 좌표를 구하여라.

풀이 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}=t$로 놓으면

$x=3t+1,\ y=-t-2,\ z=4t$ …… ①

①을 $2x+3y-z+5=0$에 대입하면
$2(3t+1)+3(-t-2)-4t+5=0$이므로 $t=1$
$t=1$을 ①에 대입하면 $x=4,\ y=-3,\ z=4$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(4,\ -3,\ 4)$이다.

답 $(4,\ -3,\ 4)$

문제 4 좌표공간에서 다음 직선과 평면의 교점의 좌표를 구하여라.

(1) 직선 $\frac{x}{2}=y-1=\frac{z+1}{2}$과 평면 $x+2y+3z-19=0$

(2) 직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{z-2}{4}$, $y=-1$과 평면 $x+2y-z+3=0$

본문 해설

① 좌표공간에서 두 평면의 교선은 두 평면의 방정식을 동시에 만족시키는 점 $(x,\ y,\ z)$의 집합이다. 이 경우 두 평면의 방정식에서 세 문자 중 각각 한 문자를 소거한 뒤 나머지 두 문자를 하나의 문자에 대한 식으로 나타내어 교선의 방정식을 구한다.

3

목표| 좌표공간에서 두 평면의 교선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 평면의 교선은 두 평면의 방정식 $x-y+z-1=0$, $2x+y-2z-1=0$을 동시에 만족시키는 점 $(x,\ y,\ z)$의 집합이다.

두 평면의 방정식에서 각각 y, x를 소거하면
$3x-z-2=0$, $-3y+4z-1=0$
z를 x, y로 나타내면
$z=3x-2$, $z=\frac{3y+1}{4}$
따라서 구하는 교선의 방정식은
$\boldsymbol{3x-2=\frac{3y+1}{4}=z}$

본문 해설

② 직선과 평면의 교점의 좌표 $(x,\ y,\ z)$는 직선과 평면을 연립한 방정식의 해이다. 이 경우 직선을 매개변수 방정식의 꼴로 나타내어 평면의 방정식의 $(x,\ y,\ z)$에 대입하여 구한다.

4

목표| 좌표공간에서 직선과 평면의 교점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{x}{2}=y-1=\frac{z+1}{2}=t$로 놓으면

$x=2t,\ y=t+1,\ z=2t-1$ ……①

①을 $x+2y+3z-19=0$에 대입하면
$2t+2(t+1)+3(2t-1)-19=0$
이므로 $t=2$
$t=2$를 ①에 대입하면
$x=4,\ y=3,\ z=3$
따라서 구하는 교점의 좌표는 **(4, 3, 3)**이다.

(2) $\frac{x+3}{2}=\frac{z-2}{4}=t$로 놓으면

$x=2t-3,\ z=4t+2$ ……①

①과 $y=-1$을 $x+2y-z+3=0$에 대입하면
$2t-3-2-(4t+2)+3=0$
이므로 $t=-2$
$t=-2$를 ①에 대입하면
$x=-7,\ y=-1,\ z=-6$
따라서 구하는 교점의 좌표는 **(−7, −1, −6)**이다.

교과서 186 쪽

좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 두 평면 α, β에 대하여 물음에 답하여 보자.

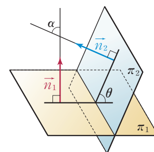
$$\alpha:\ 4x-y+z-7=0,\quad \beta:\ x+y+5=0$$

1. 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라고 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$를 구하여 보자.

2. **1**에서 구한 두 법선벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여 보자.

1 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 평면 π_1, π_2의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$라고 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각의 크기를 α라고 하면 두 평면 π_1, π_2가 이루는 각의 크기 θ는 α와 $\pi-\alpha$ 중에서 크지 않은 쪽이다.



이때 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos\alpha$이므로 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

- 두 평면이 이루는 각의 크기 θ는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.
- $|\cos\theta|=|\cos(\pi-\alpha)|$

예제 05 좌표공간에서 두 평면 $x+2y+3z-3=0$, $2x-3y-z-6=0$이 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 두 평면의 법선벡터는 각각 $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ 3)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ -3,\ -1)$이므로 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|1\times2+2\times(-3)+3\times(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

문제 5 좌표공간에서 두 평면 $x-3y+\sqrt{6}z+2=0$, $2x-2y+3=0$이 이루는 각의 크기를 구하여라.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 좌표공간에서 두 평면의 법선벡터가 이루는 각을 이용하여 두 평면이 이루는 각각의 크기는 어떻게 구하는지 알아보기 위한 것이다.

1. $\overrightarrow{n_1}=(4,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 1,\ 0)$

2. $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$

$=\frac{4\times1+(-1)\times1+1\times0}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}}$

$=\frac{1}{2}$

본문 해설

1 좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기와 마찬가지로 두 평면이 이루는 각의 크기 θ도 두 평면의 법선벡터가 이루는 각을 α라고 하면 α와 $\pi-\alpha$ 중에서 크지 않은 쪽과 같으므로 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.

이때 두 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기와 두 평면이 이루는 각의 크기가 같지 않을 수도 있음에 유의한다.

5

목표 | 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 두 평면의 법선벡터는 각각 $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -3,\ \sqrt{6})$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ -2,\ 0)$이므로 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

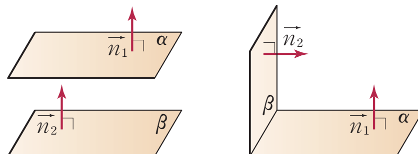
$$\cos\theta=\frac{|1\times2+(-3)\times(-2)+\sqrt{6}\times0|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(\sqrt{6})^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$

본문 해설

2 두 평면이 서로 평행하면 두 평면의 법선벡터도 서로 평행하고, 두 평면이 서로 수직이면 두 평면의 법선벡터도 서로 수직이다.



6

목표 | 좌표공간에서 두 평면의 평행 · 수직 조건을 알게 한다.

풀이 | (1) 주어진 두 평면의 법선벡터는 각각 $\overrightarrow{n_1}=(a,\ 2,\ b)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ 1,\ -3)$이고 두 평면이 서로 평행할 때 $a:2:b=2:1:(-3)$이므로

$a=4$, $b=-6$

교과서 187 쪽

② 한편 두 평면 α, β의 법선벡터가 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$일 때, 두 평면 α, β가 서로 평행하면 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.

또 두 평면 α, β가 서로 수직이면 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 평면의 평행 · 수직 조건

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $\vec{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\vec{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$일 때

(1) 평행 조건: $\alpha /\!/ \beta \iff \vec{n_1}=t\vec{n_2}$ (단, t는 0이 아닌 실수)

$\iff a_1 : b_1 : c_1=a_2 : b_2 : c_2$

(2) 수직 조건: $\alpha \perp \beta \iff \vec{n_1} \cdot \vec{n_2}=0$

$\iff a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

예제 06 좌표공간에서 두 평면 $2x-y+az-1=0$, $3x-2ay+z+5=0$이 서로 수직이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

풀이 주어진 두 평면의 법선벡터는 각각 $\vec{n_1}=(2,\ -1,\ a)$, $\vec{n_2}=(3,\ -2a,\ 1)$이고 두 평면이 서로 수직일 때 $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}=0$이므로

$$2\times3+(-1)\times(-2a)+a\times1=0,\ a=-2$$

답 -2

문제 6 다음을 구하여라.

(1) 두 평면 $ax+2y+bz+2=0$, $2x+y-3z=0$이 서로 평행하도록 하는 상수 a, b의 값

(2) 두 평면 $ax-2y+2z=0$, $2x+y-4z=0$이 서로 수직이 되도록 하는 상수 a의 값

창의 up 좌표공간에서 직선 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$과 평면 $ax+by+cz+d=0$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하는 방법을 설명하여라.

교과서 188 쪽

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리는 어떻게 구하는가?

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 평면 $\alpha : ax+by+cz+d=0$ 위에 있지 않은 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2,\ z_2)$라고 하면 점 A와 평면 α 사이의 거리는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$의 크기와 같다.

이때

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

이고, 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AH}} /\!/ \vec{n}$이므로

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\pm|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|$$

에서

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}|=|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}|}{|\vec{n}|}=\frac{|a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다. 이때 점 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2,\ z_2)$는 평면 α 위의 점이므로 $ax_2+by_2+cz_2+d=0$이다.

따라서

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=ax_2+by_2+cz_2-(ax_1+by_1+cz_1)$$
$$=-(ax_1+by_1+cz_1+d)$$

이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

수학 I 좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

보기 점 $\mathrm{A}(1,\ -2,\ -1)$과 평면 $x-y+3z+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\times1+(-1)\times(-2)+3\times(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{11}}{11}$$

(2) 주어진 두 평면의 법선벡터는 각각 $\vec{n_1}=(a,\ -2,\ 2)$, $\vec{n_2}=(2,\ 1,\ -4)$이고 두 평면이 서로 수직일 때 $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}=0$이므로

$a\times2+(-2)\times1+2\times(-4)=0$

따라서 $a=5$

창의 UP

출제 의도 | 좌표공간에서 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 방법을 설명할 수 있게 한다.

풀이 | 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기를 α라고 하면 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$=\frac{|la+mb+nc|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

따라서 $\sin\theta$의 값을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.

지/도/자/료 평행한 두 평면 사이의 거리

두 평면이 $ax+by+cz+d_1=0$과 $ax+by+cz+d_2=0$일 때, 법선벡터가 $(a,\ b,\ c)$로 같으므로 두 평면은 평행하다.

평면 $ax+by+cz+d_1=0$ 위의 한 점을 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$이라고 하면 이 점으로부터 또 다른 평면 $ax+by+cz+d_2=0$까지의 거리가 두 평면 사이의 거리가 된다.

따라서 두 평면 사이의 거리를 d라고 하면

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \cdots\cdots ①$$

그런데 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$은 평면 $ax+by+cz+d_1=0$ 위의 점이므로

$ax_1+by_1+cz_1+d_1=0$에서 $ax_1+by_1+cz_1=-d_1$

이를 ①에 대입하면

$$d=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

교과서 189 쪽

문제 7 다음 점과 평면 사이의 거리를 구하여라.

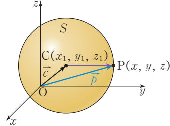
(1) 점 A(2, −1, 5)와 평면 $x-y+3z-8=0$

(2) 점 O(0, 0, 0)과 평면 $x-2y+3z-9=0$

좌표공간에서 벡터를 이용하여 구의 방정식을 어떻게 구하는가?

❶ 좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{C}(x_1,\ y_1,\ z_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 구 S의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 구 S 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라고 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$이다.



이때 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{p}-\vec{c}$이므로 $|\vec{p}-\vec{c}|=r$에서

$$|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$$

이고,

● $|\vec{x}|=a$ $\Longleftrightarrow |\vec{x}|^2=a^2$ $\Longleftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{x}=a^2$

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립한다.

한편 $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{c}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{p}-\vec{c}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$$

이고, 이것을 ①에 대입하면

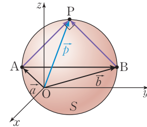
$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=r^2$$

이므로 다음과 같은 구 S의 방정식을 얻는다.

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

이제 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 S의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 구 S 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$이므로



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

이다. 이때 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{p}-\vec{b}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \cdots\cdots ②$$

이 성립한다.

교과서 190 쪽

한편 $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1),\ \vec{p}-\vec{b}=(x-x_2,\ y-y_2,\ z-z_2)$$

이고, 이것을 ②에 대입하면

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot(x-x_2,\ y-y_2,\ z-z_2)=0$$

이므로 다음과 같은 구 S의 방정식을 얻는다.

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 구의 방정식

(1) 중심이 $\mathrm{C}(x_1,\ y_1,\ z_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$
(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식은
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

예제 07 좌표공간에서 다음 구의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 A(2, −1, 3)이고 반지름의 길이가 5인 구

(2) 두 점 A(−1, 2, 1), B(3, 4, 3)을 지름의 양 끝 점으로 하는 구

풀이 (1) 중심이 (2, −1, 3)이고 반지름의 길이가 5이므로
$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$$
(2) $(x+1)(x-3)+(y-2)(y-4)+(z-1)(z-3)=0$이므로
$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=6$$

답 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$ (2) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=6$

문제 8 좌표공간에서 중심이 A(1, 2, 3)이고, 반지름의 길이가 4인 구의 방정식을 구하여라.

문제 9 좌표공간에서 다음 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하여라.

(1) A(−4, 3, −5), B(2, 3, −1)

(2) O(0, 0, 0), A(−2, 4, −8)



7

목표| 좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{|1\times2+(-1)\times(-1)+3\times5-8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}=\dfrac{\mathbf{10\sqrt{11}}}{\mathbf{11}}$

(2) $\dfrac{|-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\dfrac{\mathbf{9\sqrt{14}}}{\mathbf{14}}$

본문 해설

❶ 공간좌표를 이용하여 구한 구의 방정식과 벡터를 이용한 구의 방정식이 서로 일치하는지 알아보자.
구 S 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라고 하면
$|\overline{\mathrm{CP}}|=r$이다.
$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=r$
에서 양변을 제곱하여 정리하면
$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$이다.

8

목표| 좌표공간에서 중심과 반지름의 길이가 주어진 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathbf{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16}$

9

목표| 좌표공간에서 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 구의 방정식은
$(x+4)(x-2)+(y-3)(y-3)+(z+5)(z+1)=0$
이므로 $\mathbf{(x+1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=13}$

(2) 구하는 구의 방정식은
$x(x+2)+y(y-4)+z(z+8)=0$이므로
$\mathbf{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=21}$

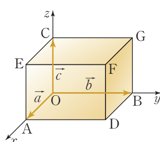
교과서 191 쪽

중단원 기초

[해답 p.220]

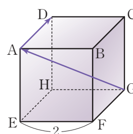
수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



01 공간벡터의 뜻과 그 연산
공간벡터의 연산

2 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GA}$의 값을 구하여라.



02 공간벡터의 성분과 내적
공간벡터의 내적

3 좌표공간에서 두 점 A(1, 4, −10), B(3, −1, 0)을 지나는 직선이 zx평면과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

03 직선의 방정식

4 좌표공간에서 두 직선

$$l_1:\ \frac{x+1}{2}=3-y=\frac{z-1}{2},\ l_2:\ x-2=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{2}$$

가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

03 직선의 방정식
두 직선이 이루는 각의 크기

5 좌표공간에서 점 A(0, −2, 2)를 지나고, 평면 $x-2y+3z+4=0$에 평행한 평면의 방정식을 구하여라.

04 평면과 구의 방정식
평면의 방정식

중/단/원 기초

1

목표| 공간벡터의 덧셈에 대한 연산법칙을 이용하여 벡터의 덧셈을 할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}$

$=\mathbf{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

2

목표| 공간벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AG}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GA}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AG}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}\cdot(-\overrightarrow{AG})=-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AG}|\cos\theta$

$=-2\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\mathbf{-4}$

3

목표| 좌표공간에서 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 점 A(1, 4, −10), B(3, −1, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-4}{-1-4}=\dfrac{z-(-10)}{0-(-10)}$이므로

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+10}{10}$

이때 이 직선과 zx평면이 만나는 점의 좌표는

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{4}{5}=\dfrac{z+10}{10}$에서

$x=\dfrac{13}{5}$, $z=-2$이므로 $\left(\mathbf{\dfrac{13}{5},\ 0,\ -2}\right)$이다.

4

목표| 좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(2,\ -1,\ 2)$, $\vec{u_2}=(1,\ 6,\ 2)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{|2\times1+(-1)\times6+2\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+6^2+2^2}}=\mathbf{0}$

5

목표| 좌표공간에서 한 점을 지나고 주어진 평면과 평행한 평면의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 평면 $x-2y+3z+4=0$의 법선벡터는 $\vec{n}=(1,\ -2,\ 3)$이다.

이때 두 평면이 평행하면 두 평면의 법선벡터도 서로 평행하므로 구하는 평면의 방정식은

$x-2(y+2)+3(z-2)=0$에서

$\mathbf{x-2y+3z-10=0}$

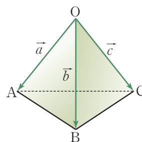
교과서 192 쪽

중단원 기본

[해답 p.220]

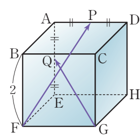
수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



01 공간벡터의 뜻과 그 연산
공간벡터의 연산

2 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 두 모서리 AD, AE의 중점을 각각 P, Q라고 하자. 이때 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{GQ}$의 값을 구하여라.



02 공간벡터의 성분과 내적
공간벡터의 내적

3 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하여라.

02 공간벡터의 성분과 내적
공간벡터의 내적

4 좌표공간에서 두 평면 $3x+4y+5z-12=0$, $4x-3y+5z+12=0$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하여라.

04 평면과 구의 방정식
두 평면이 이루는 각의 크기

5 좌표공간에서 중심의 좌표가 $(1,\ 1,\ 4)$이고, 평면 $x+y-12=0$에 접하는 구의 방정식을 구하여라.

04 평면과 구의 방정식
구의 방정식

중/단/원 기본

1

목표| 공간벡터의 덧셈의 연산법칙을 이용하여 벡터의 덧셈을 할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

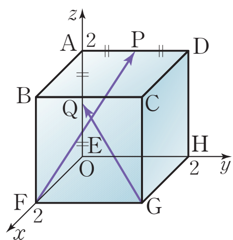
$=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$

$=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}$

2

목표| 공간벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| 꼭짓점 E를 공간좌표의 원점으로 놓고, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EA}$를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 잡으면



F$(2,\ 0,\ 0)$, G$(2,\ 2,\ 0)$, P$(0,\ 1,\ 2)$, Q$(0,\ 0,\ 1)$이므로

$\overrightarrow{FP}=(-2,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{GQ}=(-2,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{GQ}=(-2)\times(-2)+1\times(-2)+2\times1$

$=\mathbf{4}$

3

목표| 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$이므로 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=10$에서

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$10=2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로 $2=\sqrt{2}\times2\cos\theta$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$이다.

4

목표| 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 두 평면의 법선벡터는 각각 $\vec{n_1}=(3,\ 4,\ 5)$, $\vec{n_2}=(4,\ -3,\ 5)$이므로 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|3\times4+4\times(-3)+5\times5|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

5

목표| 좌표공간에서 구의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 구의 중심과 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|1\times1+1\times1+0\times4-12|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=50}$

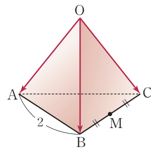
교과서 193 쪽

중단원 실력

[해답 p.221]

수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OM}\ (0\le t\le 1)$
을 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 길이를 구하여라.



02 공간벡터의 성분과 내적
위치벡터

2 좌표공간에서 두 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 2,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{p}$가 등식 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$을 만족시킬 때, 벡터 $\vec{p}$의 종점 P가 그리는 도형의 겉넓이를 구하여라.

02 공간벡터의 성분과 내적
04 평면과 구의 방정식
공간벡터의 내적
구의 방정식

3 좌표공간에서 두 직선 $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}$, $\frac{x+3}{4}=\frac{y+7}{5}=\frac{z+4}{3}$의 교점의 좌표를 구하여라.

03 직선의 방정식

4 좌표공간에서 평면 α: $x-3y+2z=0$ 위에 있지 않은 한 점 P(2, −2, 3)에서 평면 α에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구하여라.

04 평면과 구의 방정식

5 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z+k=0 \end{cases}$이 해를 가지기 위한 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

04 평면과 구의 방정식
점과 평면 사이의 거리
구의 방정식

중/단/원 실력

1

목표| 좌표공간에서 위치벡터를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OM}$이므로
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}-t\overrightarrow{OM}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{OM}$
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})$, $\overrightarrow{MP}=t\overrightarrow{MA}$ (단, $0\le t\le 1$)
따라서 점 P가 그리는 도형은 선분 AM이므로
$\overline{AM}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

2

목표| 공간벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하자.
$\vec{p}-\vec{a}=(x+1,\ y-2,\ z-4)$, $\vec{p}-\vec{b}=(x-2,\ y-1,\ z-3)$
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$
따라서 점 P가 그리는 도형의 겉넓이는
$4\times\pi\times\frac{11}{4}=\boldsymbol{11\pi}$

3

목표| 좌표공간에서 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}=s$로 놓으면
$x=2s+5$, $y=2s+2$, $z=-s-3$
$\frac{x+3}{4}=\frac{y+7}{5}=\frac{z+4}{3}=t$로 놓으면
$x=4t-3$, $y=5t-7$, $z=3t-4$
두 직선의 교점은 좌표가 각각 같을 때이므로 연립하여 풀면 $s=-2$, $t=1$
따라서 구하는 교점은 **(1, −2, −1)**이다.

4

목표| 좌표공간에서 평면에 내린 수선의 발의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 평면 α의 법선벡터가 $\vec{n}=(1,\ -3,\ 2)$이므로 점 P(2, −2, 3)을 지나고, 평면 α에 수직인 직선의 방정식은
$x-2=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{2}$
$x-2=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{2}=t$로 놓으면
$H(t+2,\ -3t-2,\ 2t+3)$이고 점 H는 평면 α 위에 있으므로 $(t+2)-3(-3t-2)+2(2t+3)=0$
$14t+14=0$, $t=-1$이므로 **H(1, 1, 1)**이다.

5

목표| 좌표공간에서 구와 평면이 만나기 위한 조건을 구할 수 있게 한다.

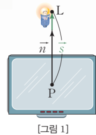
풀이| $x^2+y^2+z^2=1$은 중심이 $(0,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 구이다. 구의 중심에서 평면 $x+y+z+k=0$까지의 거리를 d라고 하면 $d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\le 1$
즉, $-\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$일 때 평면이 구와 만나므로 주어진 연립방정식은 해를 가지게 된다.
따라서 k의 최댓값은 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$, 최솟값은 $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$이다.

교과서 194 쪽

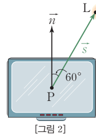
수행 과제

각도와 빛의 밝기

빛을 사방으로 반사하고 흐트러뜨리는 평면에 광원(L)으로부터 빛이 비추어진다고 가정하자. 이때 평면 위의 점 P의 밝기는 빛과 평면이 이루는 각에 의해 결정된다. $\vec{s}=\overrightarrow{PL}$이라 하고, 점 P를 시점으로 하고 평면과 수직인 벡터를 $\vec{n}$, $\vec{n}$과 $\vec{s}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면, 점 P의 밝기는 $\cos\theta$에 비례한다. 즉, [그림 1]과 같이 $\theta=0°$일 때 최대가 되고, [그림 2]와 같이 $\theta=60°$일 때 최대 밝기의 $\frac{1}{2}$이 된다.



[그림 1]



[그림 2]

세 점 $P(-3, 5, 1)$, $Q(-4, 5, 2)$, $R(-3, 4, 4)$를 포함하는 평면 α와 평면 밖의 점 $L(-5, 9, 7)$에 위치한 광원이 있다. $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}=\overrightarrow{PR}$, $\vec{s}=\overrightarrow{PL}$이라 하고 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

| 과 제 | **1** 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$를 각각 성분으로 나타내어라.

| 과 제 | **2** 평면에 수직인 법선벡터 $\vec{n}$을 구하여라.

| 과 제 | **3** 두 벡터 $\vec{n}$, $\vec{s}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.
(단, $\sqrt{56}=7.5$, $\sqrt{11}=3.3$으로 계산한다.)

| 과 제 | **4** 화면의 밝기는 보통 0부터 255까지의 정수로 나타낸다. 가장 밝은 경우를 255라고 할 때, 이 평면 위의 점 P의 밝기를 나타내는 정수를 구하여라.

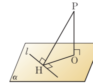
교과서 195 쪽

대단원 학습 내용 정리

① 공간도형

삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 점 O를 지나지 않는 α 위의 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여



(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$
(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$
(3) $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

이면각과 정사영

(1) 두 평면 α, β가 만날 때, 한 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어지는 도형을 이면각이라고 한다.
(2) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발 A′을 점 A의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.
① 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면
$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$$
② 도형 F의 평면 α 위로의 정사영을 F′이라 하고, 도형 F를 포함하는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ, 도형 F와 도형 F′의 넓이를 각각 S, S'이라고 하면
$$S'=S\cos\theta$$

② 공간좌표

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는
$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여
(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는
$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$
(2) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는
$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

구의 방정식

중심이 $C(a, b, c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

③ 공간벡터

공간벡터의 성분

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때
(1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
(2) $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$
(3) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$
(4) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$
(5) $k\vec{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$ (단, k는 실수)

공간벡터의 내적

두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta(0\le\theta\le\pi)$일 때
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

좌표공간에서 직선의 방정식

점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a, b, c)$에 평행한 직선의 방정식은
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ (\text{단, } abc\neq0)$$

좌표공간에서 평면과 구의 방정식

(1) 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식은
$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$
(2) 중심이 $C(x_1, y_1, z_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

용어와 기호 | 교선, 삼수선의 정리, 이면각(변, 면, 크기), 정사영, 좌표공간, 공간좌표, 공간벡터, $P(a, b, c)$

수행 과제

● 수행 과제 의도

각도와 빛의 밝기의 관계와 같이 실생활에서 좌표공간에서 평면과 공간벡터가 이루는 각의 크기가 어떻게 활용되고 있는지 알게 하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(-4, 5, 2)-(-3, 5, 1)=\mathbf{(-1, 0, 1)}$
$\vec{v}=\overrightarrow{PR}=(-3, 4, 4)-(-3, 5, 1)=\mathbf{(0, -1, 3)}$

과제 2 _풀이

$\vec{n}=(a, b, c)$라고 하면 $\vec{u}\perp\vec{n}$, $\vec{v}\perp\vec{n}$에서
$\vec{u}\cdot\vec{n}=(-1, 0, 1)\cdot(a, b, c)=-a+c=0$
이므로 $a=c$
$\vec{v}\cdot\vec{n}=(0, -1, 3)\cdot(a, b, c)=-b+3c=0$
이므로 $b=3c$
$a=1$일 때, $b=3$, $c=1$이므로
$\vec{n}=\mathbf{(1, 3, 1)}$

과제 3 _풀이

$\vec{s}=\overrightarrow{PL}=(-5, 9, 7)-(-3, 5, 1)=(-2, 4, 6)$

$$\cos\theta=\frac{|1\times(-2)+3\times4+1\times6|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+4^2+6^2}}$$
$$=\frac{16}{\sqrt{11}\sqrt{56}}=\frac{16}{3.3\times7.5}$$
$$=\frac{64}{99}$$

과제 4 _풀이

$255\times\frac{64}{99}=164.848484\cdots$이므로 이 평면의 밝기는 약 165이다.

교과서 196 쪽

대/단/원 평가 문제

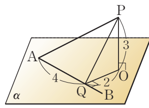
Ⅲ. 공간도형과 공간벡터

선택형

1 다음 중에서 옳지 않은 것은?

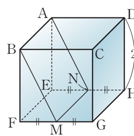
① 평행한 두 직선은 한 평면 위에 있다.
② 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면 위에 있다.
③ 한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면 위에 있다.
④ 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점은 한 평면 위에 있다.
⑤ 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있다.

2 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. $\overline{OP}=3$, $\overline{OQ}=2$, $\overline{AQ}=4$일 때, 선분 AP의 길이는?



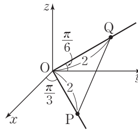
① $\sqrt{23}$ ② 5 ③ $3\sqrt{3}$
④ $\sqrt{29}$ ⑤ $\sqrt{31}$

3 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 $\overline{FG}$, $\overline{EH}$의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, 사각형 DCGH의 평면 ABMN 위로의 정사영의 넓이는?



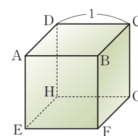
① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

4 xy 평면 위의 점 P와 yz평면 위에 점 Q에 대하여 $\overline{OP}=\overline{OQ}=2$이고 반직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$, 반직선 OQ가 y축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는? (단, 점 O는 원점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

5 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

6 두 공간벡터 $\vec{a}=(3,\ -1,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$에 대하여 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$의 값은?

① -25 ② -24 ③ -23
④ -22 ⑤ -21

7 좌표공간에서 원점 O$(0,\ 0,\ 0)$과 직선 $x-1=y+1=\frac{z}{3}$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

대/단/원 평가 문제

1

목표| 평면의 결정조건을 이해하게 한다.

풀이| ⑤ 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않다.

답 ⑤

2

목표| 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ}\perp\overline{AQ}$
삼각형 OPQ는 직각삼각형이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
또 삼각형 AQP도 직각삼각형이므로
$\overline{AP}=\sqrt{4^2+(\sqrt{13})^2}=\sqrt{29}$

답 ④

3

목표| 공간도형에서 정사영의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 평면 DCGH와 평면 ABFE는 평행하므로 사각형 DCGH의 평면 ABMN 위로의 정사영은 사각형 ABFE의 평면 ABMN 위로의 정사영과 같다.
두 평면 ABFE, ABMN이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

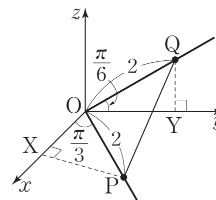
$$\square\text{ABFE}\cos\theta=4\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

답 ③

4

목표| 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이|



$\text{P}\left(2\cos\frac{\pi}{3},\ 2\sin\frac{\pi}{3},\ 0\right)$, $\text{Q}\left(0,\ 2\cos\frac{\pi}{6},\ 2\sin\frac{\pi}{6}\right)$
즉, P$(1,\ \sqrt{3},\ 0)$, Q$(0,\ \sqrt{3},\ 1)$이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{2}$

답 ①

5

목표| 공간벡터의 덧셈에 대한 연산법칙을 이용하여 벡터의 덧셈을 하고, 그 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$이므로
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{EC}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

답 ③

6

목표| 공간벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\vec{a}+\vec{b}=(3,\ -1,\ 1)+(2,\ 1,\ 3)=(5,\ 0,\ 4)$,
$\vec{a}-2\vec{b}=(3,\ -1,\ 1)-(4,\ 2,\ 6)=(-1,\ -3,\ -5)$
이므로
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=(5,\ 0,\ 4)\cdot(-1,\ -3,\ -5)$
$=-25$

답 ①

7

목표| 좌표공간에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x-1=y+1=\frac{z}{3}=t$로 놓으면

$x=t+1$, $y=t-1$, $z=3t$이므로 직선 l 위의 임의의 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(t+1,\ t-1,\ 3t)$이다.

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(t+1)^2+(t-1)^2+(3t)^2}$

$=\sqrt{11t^2+2}\geq\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. **답** ①

8

목표| 좌표공간에서 평면과 직선이 평행할 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 평면 $2x-y+az=4$의 법선벡터를 $\vec{n}$,

직선 $-x=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{2}$의 방향벡터를

$\vec{u}$라고 하면

$\vec{n}=(2,\ -1,\ a)$, $\vec{u}=(-1,\ 4,\ 2)$

평면과 직선이 평행하면 두 벡터 $\vec{n}$, $\vec{u}$는 수직이므로 $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$에서

$(2,\ -1,\ a)\cdot(-1,\ 4,\ 2)=0$

$-2-4+2a=0$이므로 $a=3$ **답** ③

9

목표| 좌표공간에서 세 점을 지나는 평면과 원점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라고 하면

$-3a+b-c+d=0$, $-5a-5b+d=0$, $a+b+c+d=0$

이 연립방정식을 풀어서 a, b, c를 각각 d로 나타내면

$a=\frac{3}{5}d$, $b=-\frac{2}{5}d$, $c=-\frac{6}{5}d$ ……①

이때 $d\neq0$이므로 평면의 방정식은

$\frac{3}{5}dx-\frac{2}{5}dy-\frac{6}{5}dz+d=0$에서 $3x-2y-6z+5=0$

따라서 원점과 평면 $3x-2y-6z+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}}=\frac{5}{7}$ **답** ②

교과서 197 쪽

[해답 p.221]

8 좌표공간에서 평면 $2x-y+az=4$와 직선 $-x=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{2}$이 평행하도록 하는 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(-3,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ -5,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$을 지나는 평면 α와 원점 사이의 거리는?

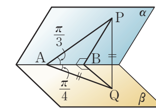
① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ 1
④ $\frac{9}{7}$ ⑤ $\frac{11}{7}$

10 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 8,\ -7)$, $\mathrm{B}(1,\ 5,\ -3)$과 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값을 k라고 할 때, k^2의 값은?

① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

서답형

11 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q는 각각 서로 만나는 두 평면 α, β 위의 점이고, 두 점 A, B는 두 평면 α, β의 교선 위의 점이다. $\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{QAB}=\frac{\pi}{4}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이고 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



12 세 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ b,\ 4)$, $\mathrm{C}(5,\ 6,\ c)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(7,\ 8,\ 9)$일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

13 $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 5,\ 2)$, $\vec{c}=(2,\ 4,\ 0)$일 때, 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라. (단, $0\leq\theta\leq\pi$)

|서|술|형|

14 평면 $x+2y+2z-9=0$이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

15 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(4,\ 2,\ 4)$, $\mathrm{B}(3,\ -2,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 7,\ 1)$을 지나는 구의 중심이 yz 평면 위에 있을 때, 이 구의 반지름의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

10

목표| 좌표공간에서 두 점과 구 위의 한 점으로 만들어지는 삼각형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-8}{5-8}=\frac{z-(-7)}{-3-(-7)}$에서

$x=\frac{y-8}{-3}=\frac{z+7}{4}$

$x=\frac{y-8}{-3}=\frac{z+7}{4}=t$로 놓으면

$x=t$, $y=-3t+8$, $z=4t-7$이므로 직선 AB 위의 임의의 점의 좌표는 $(t,\ -3t+8,\ 4t-7)$로 놓을 수 있다.

이때 구 $x^2+y^2+z^2=1$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로

$(t,\ -3t+8,\ 4t-7)\cdot(1,\ -3,\ 4)=26t-52=0$

따라서 $t=2$이므로 $\mathrm{H}(2,\ 2,\ 1)$이고,

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$이다.

한편 직선 AB 위의 점과 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 P

사이의 거리의 최솟값 $\overline{OH}-1=2$이고,

$\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(5-8)^2+\{-3-(-7)\}^2}=\sqrt{26}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$k=\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times 2=\sqrt{26}$이므로

$k^2=26$

답 ②

11

목표| 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}=a$로 놓으면

직각삼각형 ABP에서 $\overline{BP}=\sqrt{3}a$

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{BQ}=a$, $\overline{AQ}=\overline{PQ}=\sqrt{2}a$

이므로 $\overline{BQ}^2+\overline{PQ}^2=\overline{BP}^2$

따라서 삼각형 BPQ는 $\angle BQP=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{BQ}}{\overline{PB}}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12

목표| 좌표공간에서 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\left(\frac{a+3+5}{3}, \frac{1+b+6}{3}, \frac{2+4+c}{3}\right)=(7, 8, 9)$

에서 $a=13$, $b=17$, $c=21$

따라서 $a+b+c=51$

답 51

13

목표| 좌표공간에서 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\vec{a}-\vec{b}=(1, 2, 3)-(-1, 5, 2)=(2, -3, 1)$,

$\vec{a}-\vec{c}=(1, 2, 3)-(2, 4, 0)=(-1, -2, 3)$이므로

$\cos\theta=\frac{2\times(-1)+(-3)\times(-2)+1\times 3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}}$

$=\frac{1}{2}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

14

목표| 좌표공간에서 평면과 좌표축과 만나는 점을 구하고, 공간벡터의 내적을 구할 수 있게 한다.

풀이| $A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$, $C(0, 0, z)$라고 하면 세 점 A, B, C는 한 평면 위의 점이므로

$x-9=0$, $2y-9=0$, $2z-9=0$에서

$x=9$, $y=\frac{9}{2}$, $z=\frac{9}{2}$

따라서 $A(9, 0, 0)$, $B\left(0, \frac{9}{2}, 0\right)$, $C\left(0, 0, \frac{9}{2}\right)$이므로

$\overrightarrow{AB}=\left(-9, \frac{9}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(-9, 0, \frac{9}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=81$

답 81

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	세 점 A, B, C의 좌표 구하기	40%
	두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 구하기	40%
답 구하기	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 구하기	20%

15

목표| 좌표공간에서 세 점을 지나는 구의 방정식을 구하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 구의 중심의 좌표를 $P(0, b, c)$로 놓으면

$\overline{AP}^2=b^2-4b+c^2-8c+36$

$\overline{BP}^2=b^2+4b+c^2-2c+14$

$\overline{CP}^2=b^2-14b+c^2-2c+50$

구의 반지름의 길이는 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $4b+3c=11$

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서 $b=2$

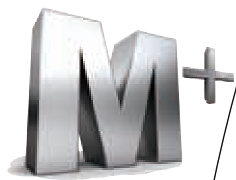
$b=2$, $c=1$이므로 구하는 구의 반지름의 길이는

$\overline{CP}=\sqrt{0^2+(-5)^2+0^2}=5$

답 5

채점 기준

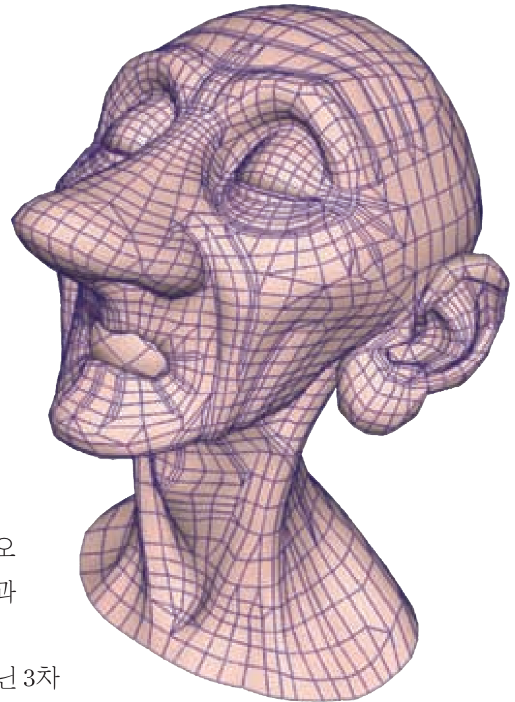
영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	구의 중심 P의 좌표 정하기	20%
	$\overline{AP}^2$, $\overline{BP}^2$, $\overline{CP}^2$ 구하기	30%
	$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$을 이용하여 구의 좌표 구하기	40%
답 구하기	구의 반지름의 길이 구하기	10%



Technology

수 학 ✚ 기 술

컴퓨터와 기하학



수학과 컴퓨터 과학의 제휴는 많은 분야에서 성과를 발휘하고 있는데, 그 분야 중 하나가 애니메이션 영화이다. 애니메이션이라고 하면 손으로 그리는 그림만을 떠올리기 쉽지만 〈토이 스토리〉와 같은 유명한 애니메이션 영화를 만들어낸 픽사 애니메이션 스튜디오에서는 애니메이션 영화를 만들 때 수학과 컴퓨터 과학을 이용하고 있다.

픽사는 본래 애니메이션을 만드는 회사가 아닌 3차원 컴퓨터 그래픽을 전문으로 하는 소프트웨어 회사인데, 단순히 시범 영상을 만들어 기술 자체만을 보여주는 것만으로는 흥미를 끌 수 없다고 생각하였다. 그래서 픽사에서 만들어낸 프로그램으로 움직임을 보이는 캐릭터를 만들고 그 캐릭터에 스토리를 입히면서 지금과 같은 애니메이션을 만드는 회사로 더 유명해졌다.





수 학 ✚ 기 술

픽사에서 이용하는 수학은 사영 기하학인데, 이는 한 영역이나 차원에서 다른 영역이나 차원으로 이미지를 투영하여 차원이 2차원인 컴퓨터 스크린에서 3차원 이미지로 보일 수 있도록 해준다. 사영 기하학과 3차원 컴퓨터 그래픽 기술을 통해 〈인크레더블(The incredible)〉, 그리고 혼자서 체스를 하는 노인에 관한 단편 〈게리의 게임(Geri's Game)〉과 같은 애니메이션이 만들어졌다. 이 중 〈게리의 게임〉의 주인공 게리는 다면체를 연속적으로 세분하여 제어 그물을 형성하는 컴퓨터 그래픽 도구를 이용하여 만들어낸 캐릭터이다.

픽사의 애니메이션 연구자들은 사영 기하학 외에도 독립적인 장면들을 조립하는 데 유클리드 기하학을 사용하기도 한다. 작은 배경 조각들과 인물들이 각각 별도의 유클리드 스페이스에서 모형화된 다음 기하학 변환을 통해 영화의 한 장면으로 조립되는 것이다. 이와 같이 수학을 이용한 기술을 많이 사용하는 픽사는 수학에 대한 관심이 많고, 이를 영화 내에서 표현하기도 한다. 예를 들어 〈월-E〉에서 나오는 우주선의 이름은 수학에서 자주 볼 수 있는 용어인 정의(Definition)이고, 이 우주선의 함장이 모르는 단어를 물어볼 때에도 "정의해 보아라." 라는 표현을 쓰는 장면이 등장한다.

〈출처: 픽사(http://www.pixar.com)〉





● 수학 용어

용어	외국어	한자
〈ㄱ〉		
가정	hypothesis	假定
감소	decreasing	減少
거듭제곱근	radical root	
결론	conclusion	結論
(집합의) 결합법칙	associative law	結合法則
계수	coefficient	係數
계승	factorial	階乘
곱의 법칙	multiplication principle	
공간벡터	space vector	
공간좌표	coordinates in space	空間座標
공비	common ratio	公比
공역	codomain	共域
공집합	empty set	空集合
공차	common difference	公差
교선	line of intersection	交線
교집합	intersection	交集合
(집합의) 교환법칙	commutative law	交換法則
구간	interval	區間
구분구적법	quadrature by parts	區分求積法
귀납적 정의	inductive definition	歸納的定義
귀류법	reduction to absurdity	歸謬法
극값	extreme values	
극대	local maximum	極大
극댓값	local maximum	
극소	local minimum	極小
극솟값	local minimum	
극한(값)	limit (value)	極限
근	root	根
근의 공식	quadratic formula	根— 公式
근호	radical sign	根號
급수	series	級數
급수의 합	sum of series	級數— 合
기댓값	expected value	
기울기	slope	
〈ㄴ〉		
나머지정리	remainder theorem	
내분	internal division	內分
내적	inner product	內積
〈ㄷ〉		
다항식	polynomial	多項式
다항함수	polynomial function	多項函數
단위벡터	unit vector	
단항식	monomial	單項式
닫힌 구간	closed interval	
대우	contraposition	對偶
대응	correspondence	對應
대입	substitution	代入
대칭이동	reflection	對稱移動
덧셈정리	addition theorem	
도함수	derivatives	導函數
독립	independence	獨立
독립시행	independent trials	獨立試行
동경	radius	動徑
동류항	similar term	同類項
두 점 사이의 거리	distance between two points	
드모르간의 법칙	De Morgan's law	
등비급수	geometric series	等比級數
등비수열	geometric sequence	等比數列
등비중항	geometric means	等比中項
등차수열	arithmetic sequence	等差數列
등차중항	arithmetic means	等差中項
〈ㄹ〉		
라디안	radian	
로그	logarithm	
로그함수	logarithmic function	
롤의 정리	Rolle's theorem	
〈ㅁ〉		
매개변수	parameter	媒介變數
명제	proposition	命題
모분산	population variance	母分散
모비율	population ratio	母比率
모집단	population	母集團
모평균	population mean	母平均
모표준편차	population standard deviation	母標準偏差
무리수	irrational number	無理數

용어	외국어	한자
무리식	irrational expression	無理式
무리함수	irrational function	無理函數
무한대	infinity	無限大
미분가능	differentiable	微分可能
미분계수	derivative	微分係數
미적분의 기본 정리	fundamental theorem of calculus	微積分－基本定理
미정계수법	method of undetermined coefficients	未定係數法
미지수	unknown	未知數
(로그의) 밑	base	
〈ㅂ〉		
반닫힌(반열린) 구간	half closed(open) interval	
발산	divergence	發散
방향벡터	direction vector	
배반사건	exclusive events	排反事件
법선벡터	normal vector	
벡터	vector	
벡터의 성분	component of vector	
벡터의 크기	norm of vector	
벤 다이어그램	Venn diagram	
변곡점	point of inflection	變曲點
복소수	complex number	複素數
부등식	inequality	不等式
부분적분법	integration by parts	部分積分法
부분집합	subset	部分集合
부분합	partial sum	部分合
부정	negation	否定
부정적분	indefinite integral	不定積分
분모의 유리화	rationalization of denominator	分母— 有理化
(집합의) 분배법칙	distributive law	分配法則
불연속	discontinuous	不連續
〈ㅅ〉		
사이값 정리	intermediate value theorem	
사인	sine	
사인함수	sine function	
삼각비	trigonometric ratio	三角比
삼각함수	trigonometric function	三角函數
삼수선의 정리	theorem of three perpendiculars	三垂線— 定理
상수함수	constant function	常數函數

용어	외국어	한자
상수항	constant term	常數項
상용로그	common logarithm	
(집합의) 서로소	disjoint	
수렴	convergence	收斂
수열	sequence	數列
수학적 귀납법	mathematical induction	數學的歸納法
수학적 확률	mathematical probability	數學的確率
순간변화율	instantaneous rate of change	瞬間變化率
순서쌍	ordered pair	順序雙
순열	permutation	順列
시점	initial point	始點
시초선	ray	始初線
시행	trial	試行
식의 값	numerical value of expression	
신뢰구간	confidence interval	信賴區間
신뢰도	confidence coefficient	信賴度
실근	real root	實根
실수	real number	實數
실수배	real number multiple	實數倍
실수부분	real part	實數部分
쌍곡선	hyperbola	雙曲線
쌍곡선의 꼭짓점	vertex of hyperbola	
쌍곡선의 점근선	asymptotic line of hyperbola	雙曲線— 漸近線
쌍곡선의 주축	principal axis of hyperbola	雙曲線— 主軸
쌍곡선의 중심	center of hyperbola	雙曲線— 中心
쌍곡선의 초점	focus of hyperbola	雙曲線— 焦點
〈ㅇ〉		
x절편	x-intercept	
x좌표	x-coordinate	
x축	x-axis	
여사건	complementary event	餘事件
여집합	complement	餘集合
역	converse	逆
역함수	inverse function	逆函數
연립일차방정식	simultaneous linear equations	聯立一次方程式
연립일차부등식	simultaneous linear inequalities	聯立一次不等式
연속	continuous	連續
연속함수	continuous function	連續函數

용어	외국어	한자
연속확률변수	continuous random variable	連續確率變數
열린 구간	open interval	
영벡터	zero vector	
y절편	y-intercept	
y좌표	y-coordinate	
y축	y-axis	
완전제곱식	perfect square(expression)	
외분	external division	外分
우극한	right-handed limit	右極限
원소	element	元素
원순열	circular permutation	圓順列
원점	origin	原點
위치벡터	position vector	
유리식	rational expression	有理式
유리함수	rational function	有理函數
음함수	implicit function	陰函數
이계도함수	second order derivatives	二階導函數
이면각	dihedral angle	二面角
이면각의 면	faces of a dihedral angle	二面角— 面
이면각의 변	edge of dihedral angle	二面角— 邊
이면각의 크기	measure of a dihedral angle	
이산확률변수	discrete random variable	離散確率變數
이차곡선	quadratic curve	二次曲線
이차방정식	quadratic equation	二次方程式
이차함수	quadratic function	二次函數
이항	transposition	移項
이항계수	binomial coefficient	二項係數
이항분포	binomial distribution	二項分布
이항정리	binomial theorem	二項定理
인수	factor	因數
인수분해	factorization	因數分解
인수정리	factor theorem	因數定理
일대일 대응	one to one correspondence	一對一對應
일대일함수	one to one function	一對一函數
일반각	general angle	一般角
일반항	general term	一般項
일차방정식	linear equation	一次方程式
일차부등식	linear inequality	一次不等式

용어	외국어	한자
일차함수	linear function	一次函數
임의추출	random sampling	任意抽出
〈ㅈ〉		
자연로그	natural logarithm	
자연수의 분할	partitions of natural number	自然數— 分割
적분상수	integral constant	積分常數
전개	expansion	展開
전개식	expansion	展開式
전수조사	total inspection	全數調査
전체집합	universal set	全體集合
절대부등식	absolute inequality	絕對不等式
정규분포	normal distribution	正規分布
정리	theorem	定理
정사영	orthogonal projection	正射影
정의	definition	定義
정의역	domain	定義域
정적분	definite integral	定積分
제곱근	square root	
조건	condition	條件
조건부확률	conditional probability	條件附確率
조립제법	synthetic division	組立除法
조합	combination	組合
종속	dependence	從屬
종점	terminal point	終點
좌극한	left-handed limit	左極限
좌표	coordinate	座標
좌표공간	coordinate space	座標空間
좌표축	coordinate axis	座標軸
좌표평면	coordinate plane	座標平面
주기	period	週期
주기함수	periodic function	週期函數
중근	multiple root	重根
중복순열	repeated permutation	重複順列
중복조합	repeated combination	重複組合
중점	midpoint	中點
증가	increasing	增加
증명	proof	證明
증분	increment	增分

용어	외국어	한자
지수함수	exponential function	指數函數
진리집합	truth set	眞理集合
진부분집합	proper subset	眞部分集合
진수	antilogarithm	眞數
집합	set	集合
집합의 분할	partition of a set	集合—分割
〈ㅊ〉		
차수	degree	次數
차집합	difference set	差集合
최대 · 최소 정리	maximum–minimum theorem	最大最小定理
최댓값	absolute maximum	最大
최솟값	absolute minimum	最小
추정	estimation	推定
충분조건	sufficient condition	充分條件
치역	range	値域
치환적분법	integration by substitution	置換積分法
〈ㅋ〉		
켤레복소수	complex conjugates	
코사인	cosine	
코사인함수	cosine function	
큰 수의 법칙	law of large numbers	
〈ㅌ〉		
타원	ellipse	橢圓
타원의 꼭짓점	vertex of ellipse	
타원의 단축	minor axis of ellipse	橢圓— 短軸
타원의 장축	major axis of ellipse	橢圓— 長軸
타원의 중심	center of ellipse	橢圓— 中心
타원의 초점	focal point of ellipse	橢圓— 焦點
탄젠트	tangent	
탄젠트함수	tangent function	
통계적 확률	statistical probability	統計的 確率
〈ㅍ〉		
파스칼의 삼각형	Pascal’s triangle	
판별식	discriminant	判別式
평균값 정리	mean value theorem	
평균변화율	mean rate of change	平均變化率
평면벡터	plane vector	
평행이동	translation	平行移動

용어	외국어	한자
포물선	parabola	拋物線
포물선의 꼭짓점	vertex of parabola	
포물선의 준선	directrix of parabola	拋物線— 準線
포물선의 초점	focal point of parabola	拋物線— 焦點
포물선의 축	axis of parabola	拋物線— 軸
표본	sample	標本
표본분산	sample variance	標本分散
표본비율	sample rate	標本比率
표본조사	sample survey	標本調査
표본평균	sample mean	標本平均
표본표준편차	sample standard deviation	標本標準偏差
표준정규분포	standard normal distribution	標準正規分布
표준화	standardization	標準化
피타고라스 정리	Pythagorean theorem	
필요조건	necessary condition	必要條件
필요충분조건	necessary and sufficient condition	必要充分條件
〈ㅎ〉		
함수의 그래프	graph of a function	
합성함수	composite function	合成函數
합의 법칙	addition principle	
합집합	union	合集合
항	term	項
항등식	identity	恒等式
항등함수	identity function	恒等函數
해	root	解
허근	imaginary root	虛根
허수	imaginary number	虛數
허수단위	imaginary unit	虛數單位
허수부분	imaginary part	虛數部分
호도법	circular measure	弧度法
확률밀도함수	probability density function	確率密度函數
확률변수	random variable	確率變數
확률분포	probability distribution	確率分布
확률질량함수	probability mass function	確率質量函數

집필진 소개



신항균
현 서울교육대학교 총장



이광연
현 한서대학교 교수



박세원
현 신경대학교 교수



신범영
현 청담중학교 교감



이계세
현 경기도학생교육원 교육연구사



김정화
현 서울고등학교 교사



박문환
현 인천인제고등학교 교사



윤정호
현 대구과학고등학교 교사



박상의
현 장충고등학교 교사



서원호
현 청원고등학교 교감



전제동
현 창원중앙고등학교 교사



이동흔
현 숭문고등학교 교사

만든 사람들
개발 책임 김경수
편집 윤준원, 최윤정
아트 디렉터 허영인
표지 디자인 김의수
본문 디자인 유지인
컷 김상준, 이도훈
조제판 벽호미디어

고등학교 기하와 벡터 교사용 지도서

2015. 3. 1. 초판 발행 정가 원

지은이 신항균 외 11인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인 (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43
내용 관련 문의 (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의 (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서

ISBN 978-89-05-04259-2 53410



고|등|학|교 기하와 벡터



ISBN 978-89-05-04259-2